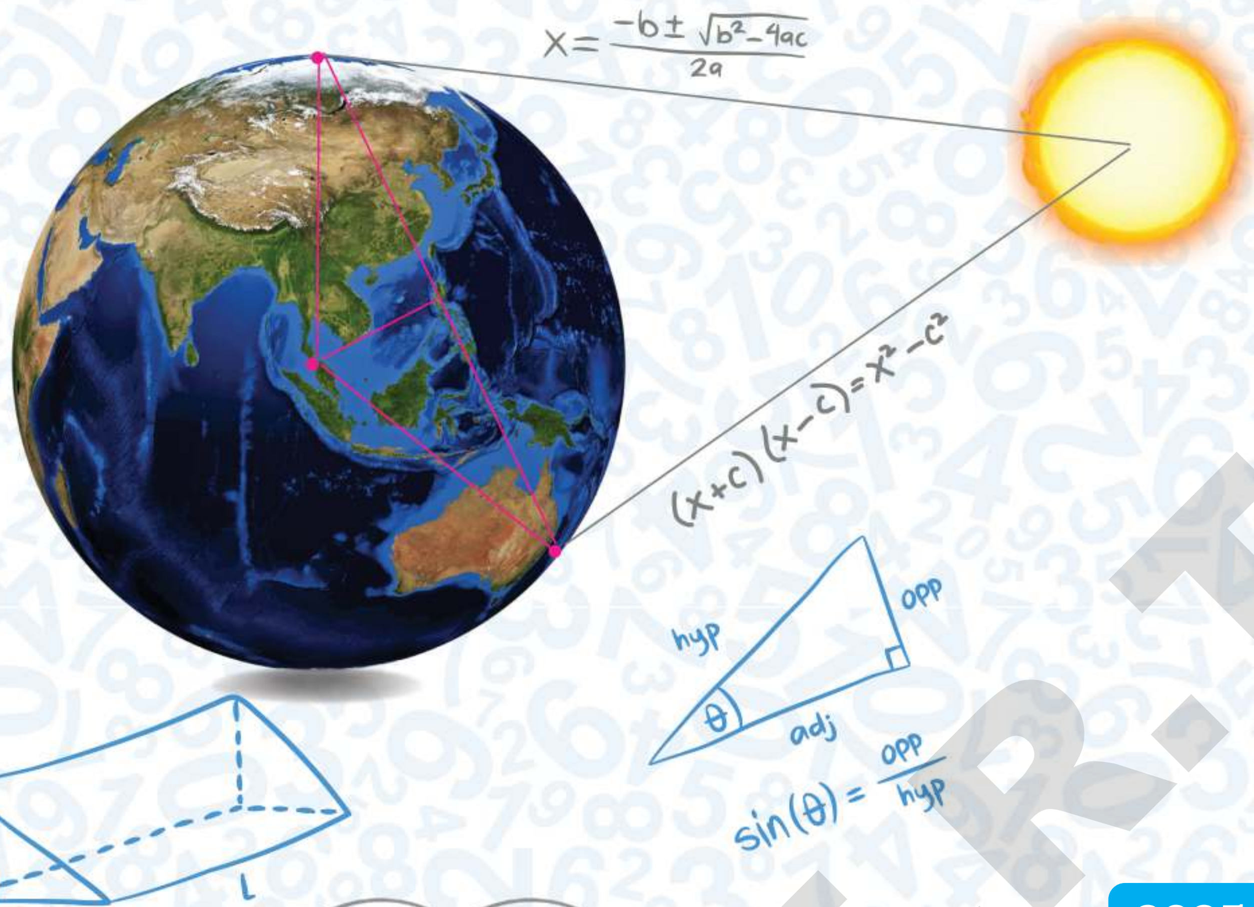
MATHEMATICS

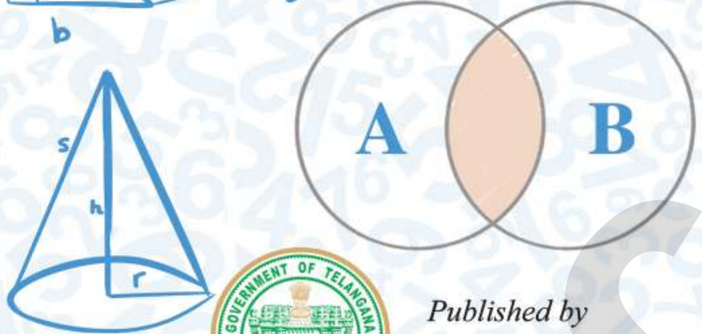
ریاضی

Part 2 حصہ

CLASS جماعت 9

URDU MEDIUM





2025-26

Published by
The Government of Telangana
ناشر: حکومت تلنگانہ حیدرآباد۔

Government's Gift for Students' Progress
طلبہ کی ترقی کے لیے حکومت کا تحفہ

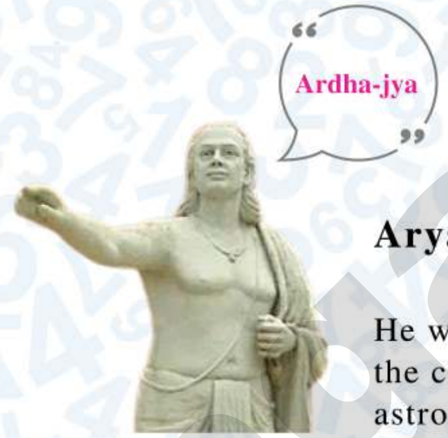
J9Q1G9

MATHEMATICS

CLASS IX

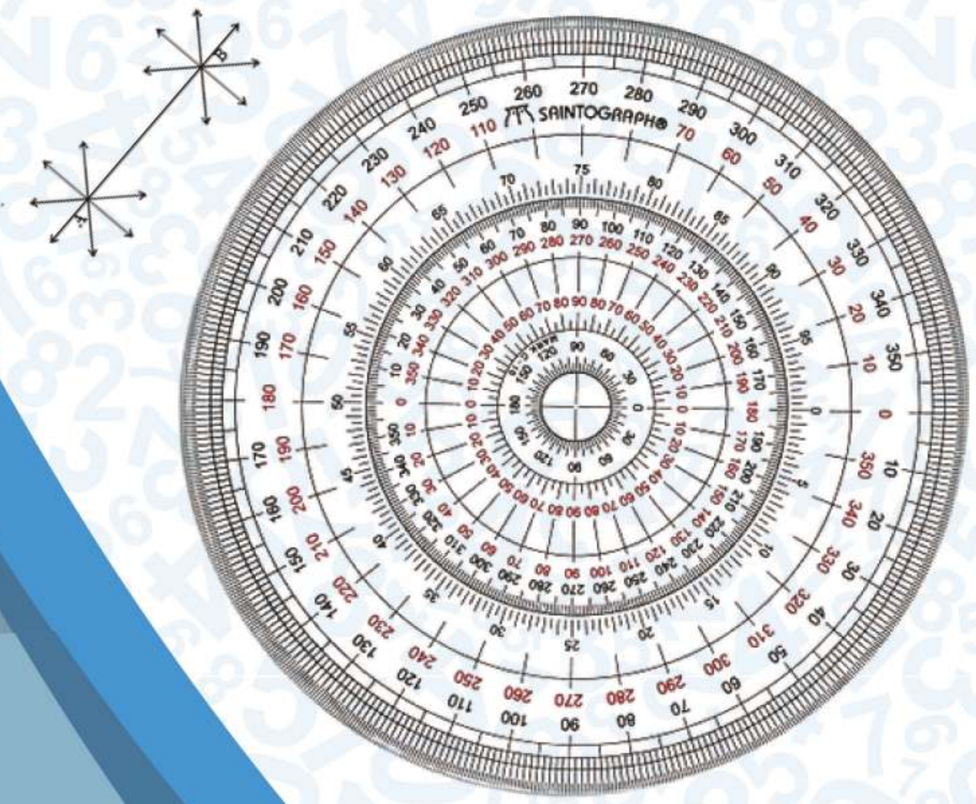
Part 2 حصہ

ریاضی

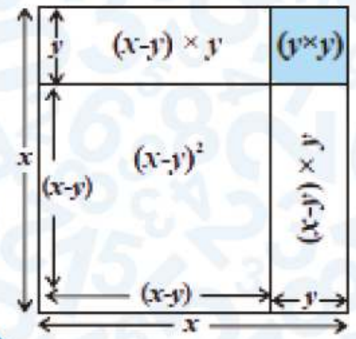


Aryabhata (476–550 CE)

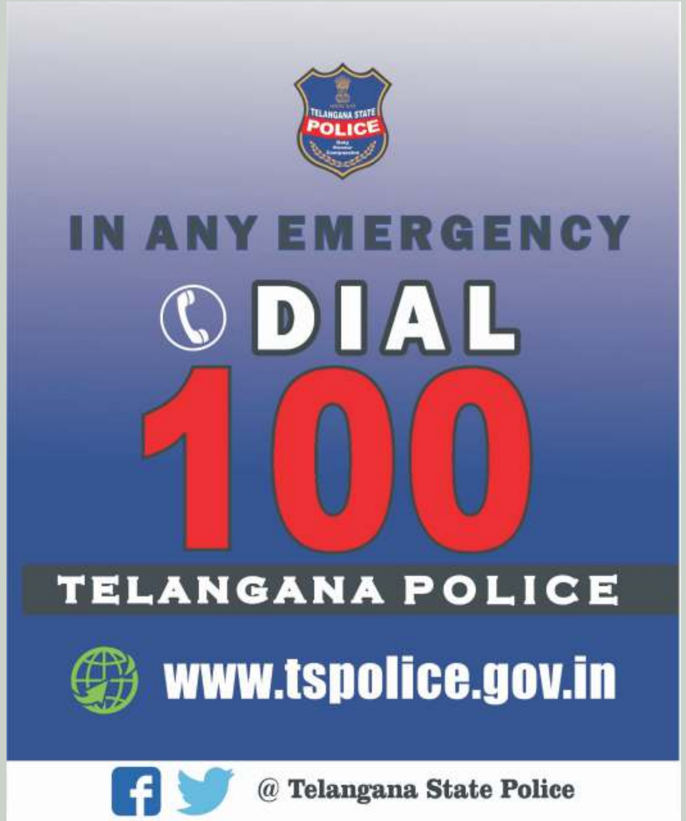
He was an Indian mathematician and astronomer of the classical age of Indian mathematics and Indian astronomy.



2025-26



State Council of Educational Research and Training
Telangana, Hyderabad
ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق و تربیت تلنگانہ، حیدرآباد۔



فعال درسی کتب طلبہ کو اس بات کی سہولت فراہم کرتی ہیں کہ وہ تصورات کو واضح انداز میں درست اور موثر طریقہ سے سمجھیں۔ QR کوڈ میں موجود مواد کو کسی بھی اسمارٹ فون کی مدد سے پڑھا جاسکتا ہے یا LCD پروجیکٹر کے اسکرین/ K-yan پروجیکٹر پر بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔ QR کوڈ میں موجود زیادہ تر مواد ویڈیو، انیمیشن اور سلائیڈس کی شکل میں موجود ہے، درسی کتب میں موجود مواد سے متعلق زائد معلومات ان میں فراہم کی گئی ہیں۔

یہ زائد معلومات نہ صرف واضح طور پر طلبہ کو تصوارت سمجھنے میں بلکہ اساتذہ کی تدریس کو بامعنی بنانے کے لیے بھی معاون ہیں۔ ہر باب کے اختتام پر ایک علیحدہ QR کوڈ میں سوالات دیئے گئے ہیں جو طلبہ کے حاصل کردہ اکتسابی ماحصل کی سطح کا تعین بھی کرتے ہیں۔ ہم یہ امید کرتے ہیں کہ اساتذہ اور طلبہ QR کوڈ میں موجود مواد کو پسندیدگی کے ساتھ استعمال کریں گے اور درس واکتساب کو مزید پرلطف اور بصیرت افروز بنائیں گے۔

QR کوڈ کا استعمال کس طرح کیا جائے آیئے جانیں گے!

اس درسی کتاب میں آپ اس طرح کے کئی QR (Quick Response) کوڈس دیکھ سکتے ہیں۔

اپنے موبائیل فون یا ٹیابلٹ یا کمپیوٹر کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپ اسباق، ویڈیوز، ڈاکیومنٹ وغیرہ دیکھئے جو QR کوڈ سے مربوط کئے گئے ہیں۔

مرحلہ	وضاحت
A	**QR کوڈ سے مربوط مواد کو دیکھنے کے لیے Andriod موبائیل فون / یا ٹیابلٹ کا استعمال کیجئے۔**
.1	اپنے موبائیل/ ٹیابلٹ میں Play Store پر کلک کیجئے۔
.2	Search bar میں Diksha ٹائپ کریں۔
.3	 آپ کی اسکرین پر کچھ اس طرح نظر آئے گا۔
.4	Install پر کلک کریں۔
.5	کامیاب طریقے سے Install اور Download کرنے کے بعد Open پر کلک کریں۔
.6	زبان کا انتخاب کیجئے اور English پر کلک کیجئے۔
.7	Continue پر کلک کیجئے۔
.8	Student / Teacher آپ جو ہیں اس کا انتخاب کیجئے اور Continue پر کلک کیجئے۔
.9	دائیں جانب اوپر موجود QR کوڈ اسکیانر کے آئیکن پر کلک کیجئے اور آپ کی درسی کتاب میں موجود QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔
.10	QR کوڈ سے مربوط عنوانات نظر آئیں گے۔
.11	مطلوبہ مواد کو دیکھنے کے لیے لنک پر کلک کیجئے۔
B	**QR کوڈ سے مربوط مواد کو دیکھنے کے لیے کمپیوٹر کا استعمال کیجئے۔**
.1	https://diksha.gov.in/telangana پر جائیے۔
.2	Explore DIKSHA-TELANGANA پر کلک کیجئے۔
.3	QR کوڈ کے نیچے موجود کوڈ کو browser search bar میں ٹائپ کیجئے۔
.4	مربوط شدہ موضوعات کی ایک فہرست نظر آئے گی۔
.5	مطلوبہ مواد کو دیکھنے کے لیے لنک پر کلک کیجئے۔

MATHEMATICS

ریاضی

IX-CLASS — جماعت نہم

Part-II — حصہ -II

ناشر
حکومت تلنگانہ، حیدرآباد

قانون کا احترام کریں — تعلیم کے ذریعے آگے بڑھیں
اپنے حقوق حاصل کریں — صبر و تحمل سے پیش آئیں

First Published 2013

New Impressions *2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022,2023,2024*

Republished-2025

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho

Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Government's Gift for Students' Progress

2025-26 طلبہ کی ترقی کے لئے حکومت کا تحفہ

Printed in India

For The Director, Telangana Govt. Text Book Press,

Mint Compound, Hyderabad,

Telangana.

حکومت تلنگانہ

محکمہ اسکولی تعلیم

تلنگانہ تَلّیِ

The Government of Telangana, Hyderabad.

ناشر حکومت تلنگانہ، حیدرآباد

ریاستی گیت

1. جَیا جَیا ہے تلنگانہ جَنانی جَیا کیتنم
مُوّکوٹی گونتوکلواو کّٹینا چیتنم
ترَاترَالا چرِیتا گلا تلّی نی راجَنم
پَدَ پدانا' نی پلّالوُ پرَ نامِلّینا شُبھا ترَوُنَم
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

2. پمپانا کوجنما نچے بدے نا کو پدیا مچے
بھیما کوی کی چنو بالا بیجا کشرامینا تلی
ہالونی گاتھا سپتاشتی کی آیو ولود ینا نے لا
بُرہکتھلا تلنگانہ کوٹی لینگالا کونا
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

3. پرجالا بھاشالوکاویا پراما نالو پرکاٹنچنا
تلگولوتولی پرجا کوی پالا کُرکی سومنّا
راجہ ننا دِھکّا رِنچی رام لوری گرُّینی گٹّی
کوی راجی ویلیگے دِشالا کنچرلا گوپنا
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

4. کالی داسا کاویالکو بھاشیا لنوراسی نٹّی
مَلّی ناتھا سوری مامیتو کو سیما کنّا بِڈّا
دھولی کٹّا نیلی نٹّی بودھا نیکی بندھوا وتاڑو
دِگنا گُنی گنّا نے لا دِھیکا رَمے جنما ہکو
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

5. پوتاندی پوریٹی گڈا اُردرامدی ویرا گڈا
گنڈارا گنڈا اڑوکومرم بھیموڑے نی بڈا
کا کتیہ کلا پربھلا کانتی ریکھا رامپّا
گولکنڈہ بھا گیہ نگری گوپّا ویلو گو چارمینارو
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

6. راچہ کونڈا ایلو بڈیگا رنجیلِّنا ریچرلا
سروجنیہ سِنگا بھوپالونی بنگارو بھومی
وانی نارانی انٹوننا دِنچنا کوی کولاروی
پلّالامرّی پینا ویرا بھدروڈو مالو رودروڈو
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

7. سمّکّلُو سارکّلو سروائی پاپنّالو
سبّنڈا ورنالا ساہا سالو کونیاڑوتو
اُورُورا پاٹالئی نا میرا سابو ویرا گا تھا
دنڈو نڑی پے پالامورو پنڈا گولّا سائنا
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

8. کَوی گائیکا وَائیتالیکا کلالاَ منُجِر یرالُو
ڈپّو ڈھمورو کمو ڈکّی شاردا سورنا دالو
پلّا وولا چیرِو جلولا پرتی اولمورن جلگا
اَنُونیتّیمِ نا گانم امّاں نی وے ماپرانم
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

9. جا آنا پدا جَنا جیوَ ناجاوالِیلُو جا آلُو وَارَا
جَا تینی جَا گروتا پرچے گِیتا لا جَناجَا ترا
ویلا کولادیگا ویرولو نیلا اوریگی پوتے نے می
تروگوندھی نی تیا گم مرووانیدی شرمایا گم
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

10. بڑولا گوڑولاتو پلےلا اوڑالو پُلا کرِنچالی
ویریسے جناوگنیانم نی کیرتنی پین چالی
تڑابڑا کنڈا جگَنا تَلا ایتّو کونی براتوکا
اوکا جاتیگا نی سنتتی اویماں ویلا گالی
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

11. سری ویلو گولو جِمّے سِنگا رینی نلّا بنگارم
اَنو ونوُ نا کھنی جالے نی تنوُ نا سنگارم
سہا جامینا ونا سمپد اسکّا نینا پوُّ لا پُوُ دا
سیرولو پنڈے سارا مونا ماگانمے کدا نی یودا
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ

12. گوداوری کرشنما لوتلّی نی نوتڑو پنگا
پچانی مانے للّو پسرِ ی سیرولو پنڈ نگا
سکھا شانتولا تلنگانہ سِھکشَنگا اُنڈا لے
پراتی دینا مدی تلنگانہ پرجالا کللو پنڈا لی
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ
جئے تلنگانہ جئے جئے تلنگانہ – اندے سری

قومی ترانہ

جن گن من ادھی نایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا، ڈراوڑ، اتکل، ونگا
وندھیا، ہماچل، یمنا، گنگا، اُچ چھل جل دھی ترنگا
تواشبھ نامے جاگے، تواشبھ آشش ماگے
گاہے تو جیا گاتھا
جن گن منگل دایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
جیا ہے، جیا ہے، جیا ہے
جیا جیا جیا جیا ہے

– رابندرناتھ ٹیگور

عہد

ہندوستان میرا وطن ہے۔ مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم اور گوناگوں ورثے پر فخر کرتا ہوں/ کرتی ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کرتا رہوں گا/ کرتی رہوں گی۔ اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا/کروں گی اور ہر ایک کے ساتھ خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا/ کروں گی۔ میں جانوروں کے تئیں رحم دلی کا برتاؤ رکھوں گا/ رکھوں گی۔ میں اپنے وطن اور ہم وطنوں کی خدمت کے لیے اپنے آپ کو وقف کرنے کا عہد کرتا ہوں/ کرتی ہوں۔

– پیڈیمری وینکٹا سباراؤ

دستور ہند

دیباچہ

ہم ہندوستان کے عوام نے نہایت ہی سنجیدگی کے ساتھ خود کو **ایک مقتدر اعلیٰ، سوشلسٹ، سیکولر، عوامی جمہوریہ میں تشکیل دینے کا فیصلہ کرتے ہوئے شہریوں کے لیے**

انصاف: سماجی، معاشی اور سیاسی

آزادی، غور وفکر، اظہار خیال، عقیدہ اور عبادت کی

مساوات: **مرتبہ اور مواقع کی اور تمام میں**

اخوت (بھائی چارہ) کو فروغ دینے کا عزم کرتے ہوئے،

فرد کی عزت ووقار اور ملک کی سالمیت اتحاد کا تیقن دیتے ہیں۔

اپنی دستور ساز اسمبلی میں آج 26/ نومبر 1949ء کے دن اس کو وضع کرتے ہوئے، اپناتے ہوئے اس دستور کو خود اپنے کو دیتے ہیں۔

پیش لفظ

تعلیم انسانی روشن خیالی اور اسے بااختیار بنانے کا عمل ہے۔ تعلیم کے لامحدود فوائد اور بے پناہ صلاحیتوں کو تسلیم کرتے ہوئے تمام ترقی پسند معاشروں نے سب کو معیاری تعلیم فراہم کرنے کے پختہ عزم کے ساتھ ابتدائی تعلیم کو عالمگیر بنانے کا عہد کیا ہے۔ ثانوی تعلیم کا فروغ اور اس کی عالمگیریت بھی اسی پالیسی پر عمل آوری کا تسلسل ہے۔

پرائمری سطح تک روزمرہ زندگی کے لیے کارآمد حساب کی تدریس ثانوی مرحلے میں عبوری طور پر ایک ضروری مضمون کی حیثیت اختیار کرلیتی ہے۔ ثانوی سطح میں مفروضات، مسائل وغیرہ کے منطقی ثبوت پیش کیے گئے ہیں۔ ریاضی ایک مخصوص مضمون ہونے کے علاوہ دوسرے مضامین کے تجزیہ میں شامل ہم آہنگ طریقوں کے ساتھ منسلک ہوتا ہے۔ طلبہ کو اعلیٰ سطح کی تعلیم تکمیل کرنے اور ملک عزیز ہندوستان کے بہترین شہری بننے کے لئے یہ ضروری ہے کہ ثانوی سطح کی ریاضی تعلیم کو تجربات منظم کرنے، حوصلہ افزائیو اعتماد کے ساتھ فراہم کریں۔

مجھے یقین ہے کہ ہماری ریاست تلنگانہ میں طلباء ریاضی کو سیکھنے میں لطف اندوز ہوں گے اور ریاضی کو اپنی زندگی کے تجربات کا حصہ بنائیں گے۔ بامعنی مسائل کی تشریح کرتے ہوئے انہیں حل کریں گے اور اس درسی کتاب کی مدد سے ریاضی کی بنیادی ساخت کا فہم حاصل کریں گے۔

اساتذہ سے امید کی جاتی ہے کہ وہ طلبہ کے نشانات پر زور دینے کے بجائے مضمون کے تنقیدی مسائل اور تدریسی نقطہ نظر پر توجہ مرکوز کریں جو وقت کی اہم ضرورت ہے۔ نیز درس و تدریس میں نصابی امور کی موثر منتقلی کے لیے ضروری ہے کہ مخلوط کمرے جماعت کے تقاضوں کو پورا کریں۔ طرز زندگی کے اختلافات اور اختلاف رائے کا احترام کرتے ہوئے طلباء میں مثبت رجحانات و مثبت دلچسپی پیدا کرنے کے لیے مخلوط کمرہ جماعت کے ماحول کو پروان چڑھانا ہی اصل تدریسی تقاضہ ہے۔

اردو اور انگریزی دونوں زبانوں میں طلبہ کی تفہیمی مہارتوں کو فروغ دینے کے مقصد سے حکومت تلنگانہ نے اس کتاب کو از سر نو مرتب کرتے ہوئے ذولسانی شکل دے کر دو حصّوں میں شائع کیا ہے۔ پہلے حصّے میں 1، 2، 3، 4، 6، 9، 10 اسباق شامل کئے گئے ہیں۔ جبکہ دوسرے حصّے میں 5، 7، 8، 11، 12، 13، 14، 15 اسباق شامل کئے گئے ہیں۔

ریاضی کی تدریس کے مذکورہ نقطہ نظر کو ریاضی کے ویژن کے طور پر ریاستی درسیاتی خاکہ (SCF-2011) میں شامل کیا گیا ہے۔ یہی بات ریاضی کی تدریس سے متعلق مقالہ جات (پوزیشن پیپر) میں واضح طور پر پیش کی گئی ہے جو ریاست میں ریاضی کی تدریس کے تعلیمی معیارات کو بھی واضح طور پر بیان کرتا ہے۔ اس نصابی کتاب کو QR کوڈ کے ساتھ منسلک کیا گیا ہے تاکہ طلباء کو تصورات واضح طور پر سمجھنے میں سہولت فراہم کی جاسکے۔

ریاستی کونسل برائے تعلیمی تحقیق و تربیت تلنگانہ نے ٹیکسٹ بک ڈیولپمنٹ کمیٹی اور ریاست کے مختلف مقامات سے تعلق رکھنے والے متعدد اساتذہ کی انتھک کوششوں کی ستائش کرتا ہے جنہوں نے اس کتاب کی تیاری میں اپنا تعاون پیش کیا۔ ہم اسکول ایجوکیشن ٹاٹا انسٹی ٹیوٹ آف سوشل سائنس (TISS) حیدرآباد کی فیکلٹی اور کمپیوٹر آفیسر TISS , CETE ممبئی اور ریاستی کونسل برائے تعلیمی تحقیق و تربیت تلنگانہ کے ذریعہ نامزد کردہ کتابی ترتیب کے ماہرین کا ان کی تکنیکی مدد کے لیے خصوصی طور پر ممنون و مشکور ہیں۔

ڈائرکٹر

ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق و تربیت تلنگانہ، حیدرآباد

INDEX

فہرست

Chapter

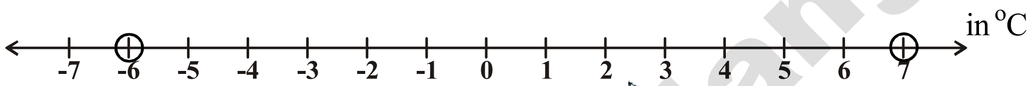
5

Co-Ordinate Geometry

Q8T3Y5

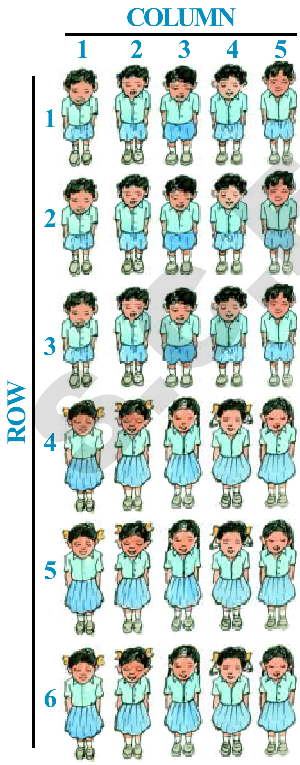
5.1 Introduction

The minimum and the maximum temperatures of Kufri in Himachal Pradesh on a particular day in the month of December were - 6°C and 7°C. Can you represent them on a number line?



Here the numberline acts as a reference scale to indicate the status of temperature on a particular day.

Let us observe the situation as shown in the adjacent picture. Eight persons A, B, C, D, E, F, G and H are standing in a queue. From the ticket counter, A is the first and H is the last person in the queue. With reference to the cafe, 'H' becomes the first and 'A' will become the last person. You might have observed that the positioinal value of the object changes along with the change of reference.



Let us observe another example. In a games period, the students of class IX assembled as shown in the picture. Can you say where Sudha is standing in the picture?

Rama said "Sudha is standing in 2^{nd} column."

Pavani said "Sudha is standing in 4^{th} row."

Nasima said "Sudha is standing in 2^{nd} column and 4^{th} row."

Whom of the above gave correct information? Can you identify Sudha with the information given by Nasima? Can you locate the position of Madhavi (who is standing in 1st column and 5^{th} row?)

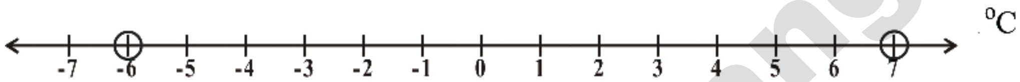
Identify the students who are standing in following positions.

(i) (3rd column, 6th row) by Sita
(ii) (5th column, 2nd row) by Raju

باب
5
تحلیلی جیومیٹری

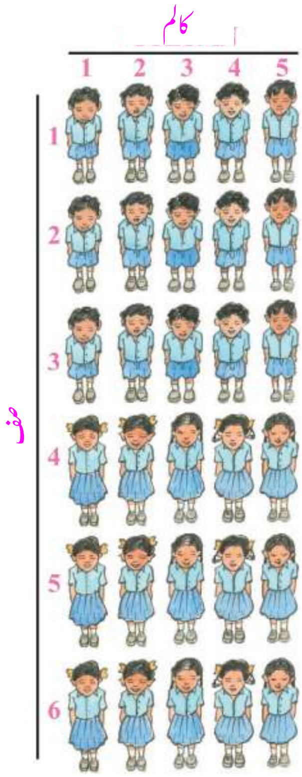
5.1 تعارف

ہماچل پردیش کے علاقے کفری میں ماہِ دسمبر کے کسی مخصوص دن اقل ترین اور اعظم ترین درجہ حرارت بالترتیب $-6^{\circ}C$ اور $7^{\circ}C$ رہا۔ کیا آپ انھیں عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں؟



یہاں عددی خط کسی مخصوص دن درجہ حرارت کو ظاہر کرنے کے لئے حوالے کے پیمانے کے طور پر کام کر رہا ہے۔

آیئے متصلہ تصویر میں ظاہر کی گئی صورتحال پر غور کریں۔ آٹھ افراد A،B،C،D،E،F،G اور H ایک قطار میں ٹھہرے ہوئے ہیں۔ ٹکٹ کاونٹر کے لحاظ سے قطار میں A پہلا جب کہ H آخری شخص ہے۔ CAFE کیفے کی جانب سے H پہلا اور A آخری شخص ہوگا۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ ایک شئے کی مقامی قدر اس کے حوالے کی تبدیلی سے بدل جاتی ہے۔



ہم ایک اور مثال پر گفتگو کریں گے۔ کھیل کے گھنٹے میں نہم جماعت کے تمام طلباء ایک جگہ جمع ہوئے ہیں جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ سدھا تصویر میں کہاں ٹھہری ہوئی ہے۔

راما نے کہا ''سدھا دوسرے کالم میں ٹھہری ہوئی ہے''

پوانی نے کہا ''سدھا چوتھی صف میں ٹھہری ہوئی ہے''

نسیمہ نے کہا ''سدھا دوسرے کالم اور چوتھی صف میں ٹھہری ہوئی ہے''

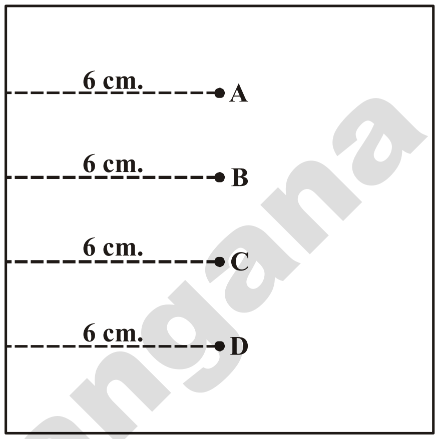
کس نے درست اطلاع دی؟ نسیمہ کی دی گئی اطلاع کے مطابق کیا آپ سدھا کی شناخت کر سکتے ہیں؟ کیا آپ مادھوری کے مقام کی نشان دہی کر سکتے ہیں؟ جو پہلے کالم اور پانچویں صف میں ٹھہری ہوئی ہے؟

ان طلبہ کی نشاندہی کیجیے جو حسب ذیل مقامات پر کھڑے ہوئے ہیں۔

(i) تیسرا کالم چھٹی صف سیتا کا مقام (ii) پانچواں کالم دوسری صف راجو کا مقام

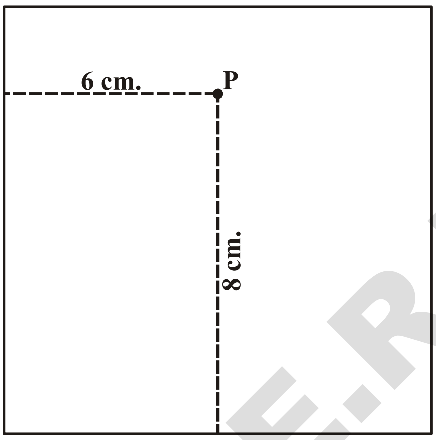
In the above example can you say how many references did you consider? What are they?

Let us discuss one more situation.



A teacher asked her students to mark a point on a sheet of paper. The hint given by the teacher is "the point should be at a distance of 6 cm from the left edge." Some of the students marked the point as shown in the figure.

In the figure which point do you suppose is correct? Since each point A,B,C and D is at a distance of 6 cm from the left edge, no point can be denied. To fix the exact position of the point one more information is needed. To fix its exact position, another reference, say, the distance from the edge of the top or bottom has to be given.



Suppose the teacher says that the point is at a distance of 6 cm from the left edge and at a distance of 8 cm from the bottom edge, now how many points with this description can be marked?

Only a single point can be marked. So, how many references do you need to fix the position of a point?

We need two references to describe for fixing the exact position of a point. The position of the point is denoted by (6,8). If you say "a point is marked at a distance of 7 cm from the top." Can you trace its exact position? Discuss with your friends.

Do This

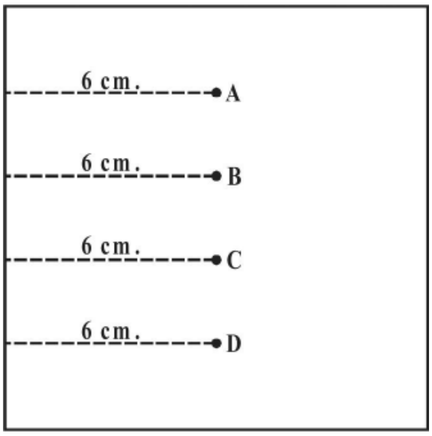
Describe the seating position of any five students in your classroom.

Activity (Ring Game)

Have you seen 'Ring game' in exhibitions? We throw rings on the objects arranged in rows and columns. Observe the following picture.

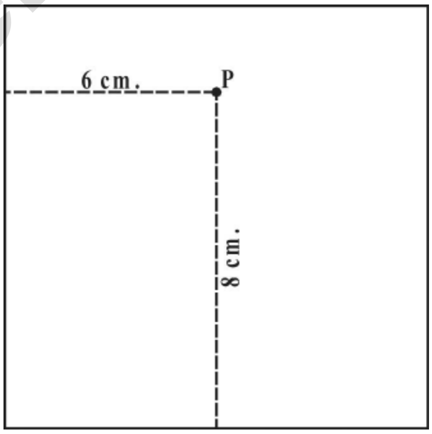
کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اوپر کی مثال میں آپ نے کتنے حوالوں پر غور کیا؟ وہ کونسے ہیں؟

آیئے ہم ایک اور صورت حال پر غور کریں۔



ایک مدرس نے کاغذ کی شیٹ پر ایک نقطہ لگانے کے لئے کہا۔ مدرس نے نقطہ لگانے کے لیے اس طرح اشارہ دیا کہ ''نقطہ کاغذ کی بائیں کنارے سے 6 سنٹی میٹر کی دوری پر ہونا چاہئے'' چند طلبا نے دی گئی شکل کے مطابق نقطے لگائے۔

شکل کے مطابق آپ کونسے نقطے کو درست سمجھتے ہیں، چونکہ A، B، C، اور D کاغذ کی بائیں کنارے سے 6 سمر کی دوری پر ہیں' اس لئے کسی بھی نقطے کو غلط نہیں سمجھا جا سکتا۔ نقطے کے حقیقی مقام کو متعین کرنے کے لئے کونسی مزید معلومات کی ضرورت ہے؟ نقطے کے حقیقی مقام کے تعین کے لئے ایک اور حوالہ یعنی پیپر شیٹ پر اوپری یا نچلی سطح سے فاصلہ دیا جانا ضروری ہے۔



فرض کیجئے کہ مدرس نے کہا کہ نقطہ پیپر شیٹ کی بائیں کنارے سے 6 سمر اور نچلے کنارے سے 8 سمر کی دوری پر واقع ہے۔ مذکورہ وضاحت سے کتنے نقاط لگائے جاسکتے ہیں؟ صرف ایک ہی نقطہ لگایا جا سکتا ہے۔ اس لئے ایک نقطے کے تعین کے لئے کتنے حوالوں کی ضرورت ہے؟

ایک نقطے کے حقیقی مقام کو متعین کرنے کے لئے ہمیں دو حوالوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ نقطے کے مقام کو (6,8) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ آپ اگر یہ کہتے ہیں کہ ''ایک نقطہ اوپری سطح سے 7 سمر کی دوری پر لگایا گیا ہے'' تو کیا آپ اس کا حقیقی مقام بتا سکتے ہیں؟ اپنے دوستو سے اس پر گفتگو کیجئے۔

یہ کیجیے

اپنے کمرۂ جماعت میں کسی پانچ طلباء کے نشستوں کی نشاندہی کیجئے۔

عملی کام (حلقے کا کھیل)

کیا آپ نے مختلف نمائشوں میں ''رنگ گیم'' کو دیکھا ہے، صف اور کالم میں جمائی گئی اشیاء پر ہم رنگ پھینکتے ہیں۔

حسب ذیل تصویر پر غور کیجئے۔

Complete the following table with suitable numbers

Object	Column	Row	Position
Purse	3	4	(3,4)
Match box	....	3	(,3)
Clip	....	....	....
Teddy	....	....	....
Soap	....	....	....

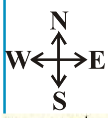
Is the object in 3^{rd} column and 4^{th} row is same as 4^{th} column and 3^{rd} row?

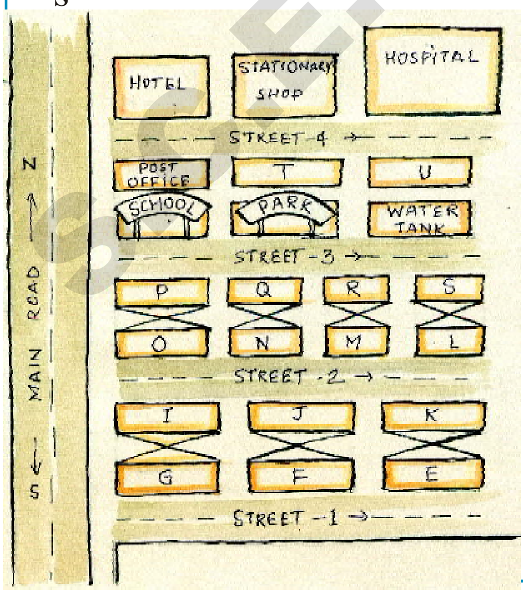
The representation of a point on a plane with idea of two references led to development of new branch of mathematics known as Coordinate Geometry.

Rene Descartes (1596-1650), a French mathematician and philosopher has developed the study of Co-ordinate Geometry. He found an association between algebraic equations and geometric curves and figures. In this chapter we shall discuss about the point and also how to plot the points on a co-ordinate plane.

EXERCISE 5.1

1. In a locality, there is a main road along North-South direction. The map is given below. With the help of the picture answer the following questions.





(i) What is the 3^{rd} object on the left side in street no. 3?

(ii) Find the name of the 2^{nd} house which is in right side of street 2.

(iii) Locate the position of Mr. K's house.

(iv) Describe the position of the post office.

(v) Describe the location of the hospital.

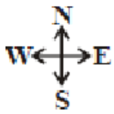
حسب ذیل جدول کو مکمل کیجئے

اشیاء	کالم	صف	مقام
پرس	3	4	(3,4)
دیاسلائی کی ڈبیہ	....	3	(,3)
Clip کلپ	....	....	....
گڑیا	....	....	....
صابن	....	....	....

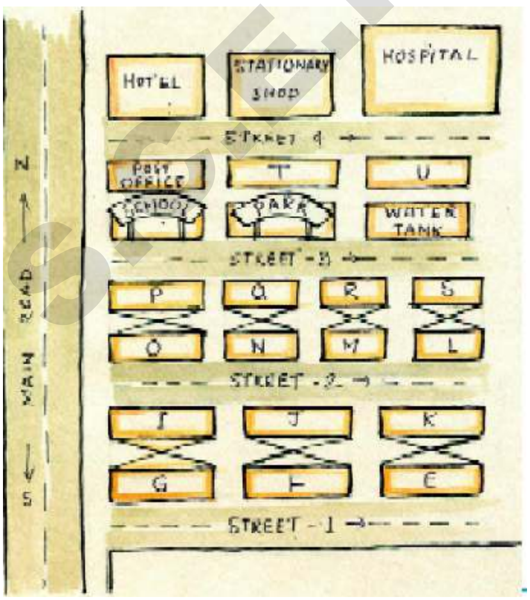
تیسرے کالم اور چوتھی صف میں موجود شئے کیا وہی ہے جو چوتھے کالم اور تیسری صف میں موجود ہے؟

دوحوالوں کی مدد سے ایک نقطے کے اظہار سے ریاضی کی ایک نئی شاخ کو فروغ حاصل ہوا جسکو تحلیلی جیومٹری کے نام سے جانا جاتا ہے۔فرانسیسی ریاضی داں و فلسفی ’’رینے ڈیکارٹے‘‘ (1596-1650) نے تحلیلی جیومیٹری کو فروغ دیا۔اس نے الجبرائی مساواتوں اور جیومٹری کی اشکال کے درمیان تعلق کو معلوم کیا۔اس باب میں ہم مستوی پر نقطہ لگانے کے تعلق سے بحث کریں گے۔

مشق 5.1



1. ایک بستی میں شمالاً-جنوباً سمت میں ایک سڑک واقع ہے۔نقشہ ذیل میں دیا گیا ہے تصویر کی مدد سے حسب ذیل سوالات کے جوابات دیجئے۔



(i) گلی نمبر 3 میں بائیں جانب تیسری عمارت کون سی ہے؟

(ii) گلی نمبر 2 میں دائیں جانب دوسرے گھر کا نام معلوم کیجئے۔

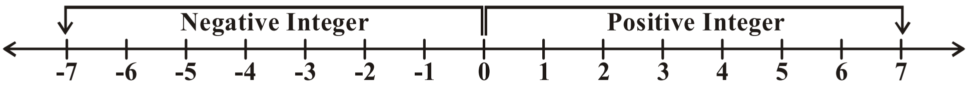
(iii) مسٹر K کے گھر کی نشان دہی کیجئے۔

(iv) پوسٹ آفس کے مقام کی وضاحت کیجئے۔

(v) آپ کس طرح ہسپتال کا مقام ظاہر کریں گے؟

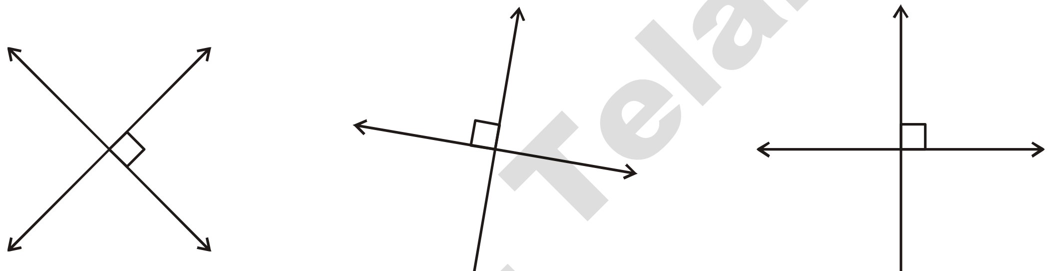
5.2 Cartesian System

We use number line to represent the numbers by marking points on the line. Observe the following integer line.



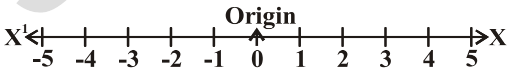
Points marked with equidistance on either side from the fixed point zero. The fixed point corresponding to zero is called orgin, it is denoted by 'O'. All positive integers are shown on the right side of zero and all negative integers on its left side.

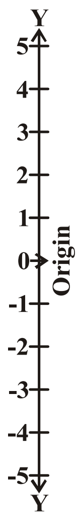
We take two number lines, perpendicular to each other in a plane. We locate the position of a point with reference to these two lines. Observe the following figure.

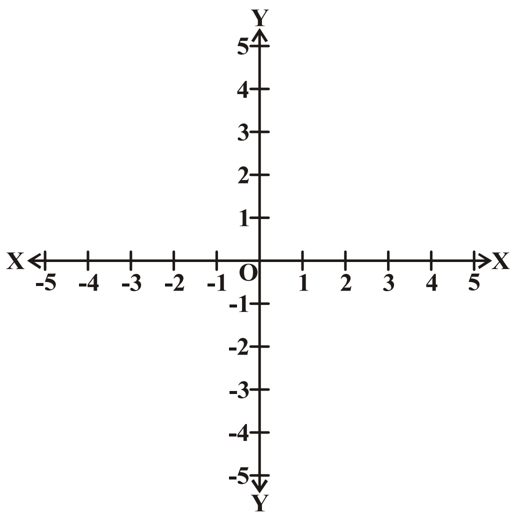


(i) (ii) (iii)

The perpendicular lines may be in any direction as shown in the figures. But, when we choose these two lines to locate a point in a plane in this chapter, for the sake of convenience we take one line horizontally and the other vertically as in fig. (iii). We draw a horizontal number line and a vertical number line intersecting at a point perpendicular to each other. The point of intersection is denoted as origin. The horizontal number line XX^1 is known as X-axis and the vertical number line YY^1 is known as Y-axis.

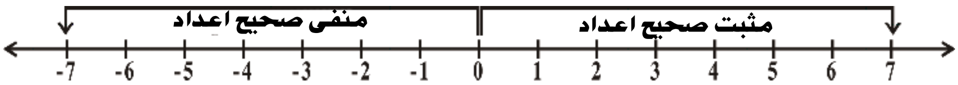






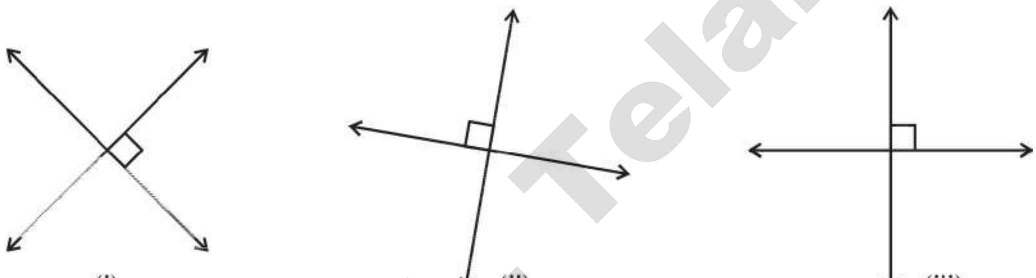
5.2 کارتیزی نظام

ہم عددی خط پر مساوی فاصلے پر نقاط کی نشاندہی کرتے ہوئے اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔ ذیل کے عددی خط کا مشاہدہ کریں گے۔



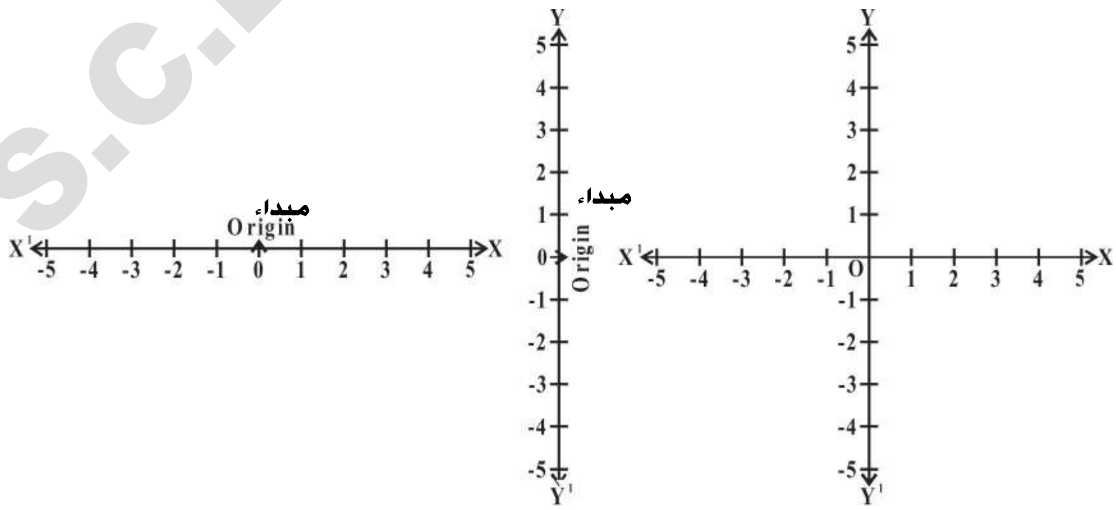
عددی خط پر قائم نقطے صفر سے دونوں جانب مساوی فاصلے نقاط کی نشاندہی کی جاتی ہے اسے مبدا Origin کہتے ہیں اور اسے O سے ظاہر کرتے ہیں۔ تمام مثبت صحیح اعداد کو صفر کے دائیں جانب اور تمام منفی صحیح اعداد کو صفر کے بائیں جانب ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم مستوی میں ایک دوسرے پر عمودوار عددی خطوط لیتے ہیں جو ایک دوسرے پر عمودوار ہیں۔ ہم ان دو خطوط کے حوالے سے ایک نقطے کا تعین کرتے ہیں۔ مندرجہ ذیل اشکال کا مشاہدہ کیجئے۔

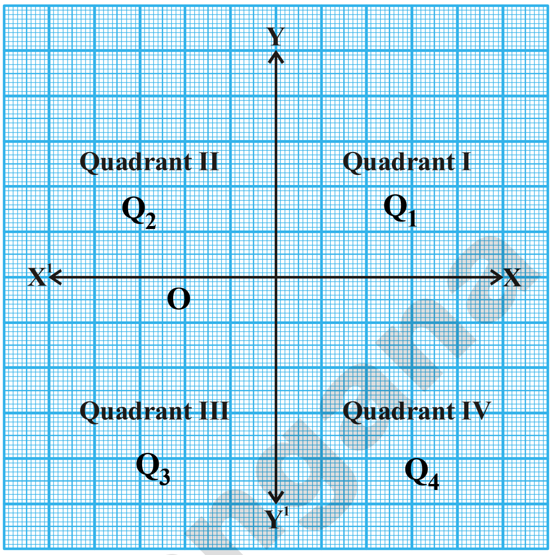


(i) (ii) (iii)

عمودوار خطوط کسی بھی سمت میں ہو سکتے ہیں جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے۔ لیکن اس باب میں جب ہم ان دو خطوط کو مستوی کسی نقطے کے تعین کے لئے انتخاب کرتے ہیں تو آسانی کے لئے ہم ایک افقی اور دوسرا عمودی خط لیتے ہیں جس طرح شکل (iii) میں ہے۔ ہم ایک افقی عددی خط اور ایک انتصابی خط کھینچیں گے جو ایک نقطہ پر ایک دوسرے پر عمودوار ہیں، نقطہ تقاطع کو مبدا سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ افقی خط XX' کو x محور اور عمودی خط YY' کو y محور کے نام سے جانا جاتا ہے۔

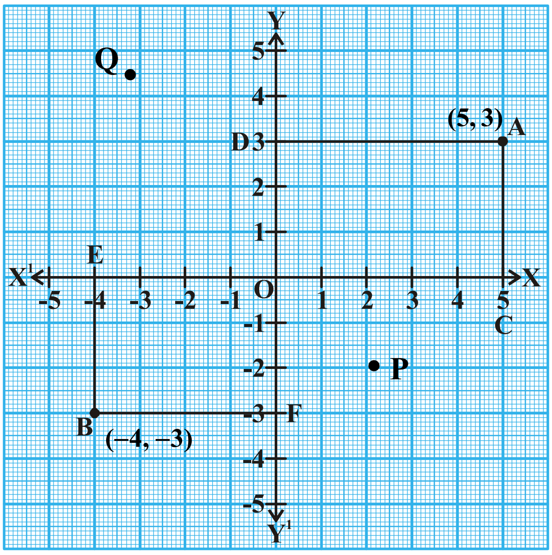


The point where XX^1 and YY^1 cross each other is called the origin, and is denoted by 'O'. Since the positive numbers lie on the directions $\overrightarrow{OX}$, is called the positive direction of the X-axis, similarly $\overrightarrow{OY}$ is the positive Y-axis respectively. Also $\overrightarrow{OX^1}$ and $\overrightarrow{OY^1}$ are called the negative directions of the X-axis and the Y-axis respectively. We can observe that the axes (plural of axis) divide the plane into four parts. These are called first, second, third and fourth quadrants respectively. These four parts are called the quadrants and are denoted by Q_1, Q_2, Q_3 and Q_4 in anti clockwise direction. The plane here is called the cartesian plane (named after Rene Descartes) or co-ordinate plane or XY-plane. The axes are called the coordinate axes.



5.2.1 Locating a Point

Now let us see how to locate a point in the coordinate system. Observe the following graph. Two axes X and Y are drawn on a graph paper. A and B are any two points on it. Can you say the quadrants to which the points A and B belong to?

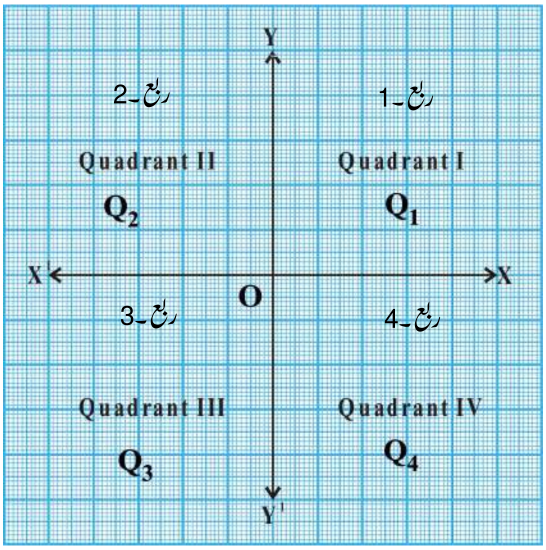


The point A is in the first quadrant (Q_1) and the point B is in the third quadrant (Q_3). Now let us see the distances of A and B from the axes. For this we draw the perpendiculars AC on the X-axis and AD on the Y-axis. Similarly, we draw perpendiculars BE and BF as shown in figure.

We can observe the following

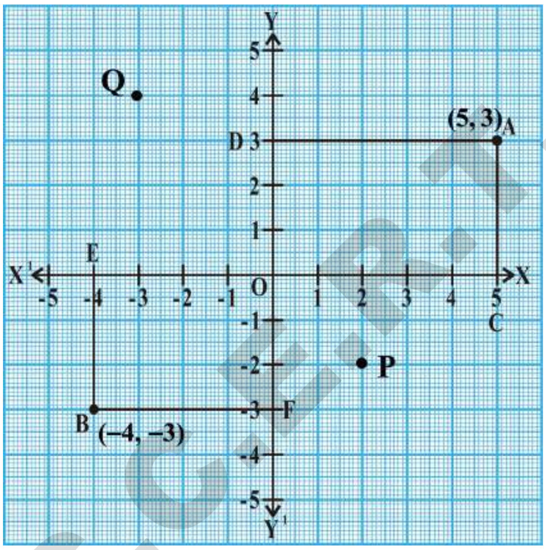
(i) The perpendicular distance of the point A from the Y-axis measured along the positive direction of X-axis is AD=OC= 5 units. We call this as X-coordinate of 'A'.

(ii) The perpendicular distance of the point A from the X-axis measured along the positive direction of the Y-axis is AC=OD=3 units. We call this as Y-coordinate of 'A'. Therefore coordinates of 'A' are (5, 3)



جس نقطے پر 'XX اور 'YY ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اس کو مبدا کہتے ہیں اور اس کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے چوں کہ مثبت اعداد $\overrightarrow{OX}$ سمت میں پائے جاتے ہیں اس لئے اس کو X محور کی مثبت سمت کہتے ہیں۔ اسی طرح $\overrightarrow{OY}$ کو مثبت Y محور کہتے ہیں۔ 'OX اور 'OY کو بالترتیب X محور اور Y محور کی منفی سمت کہا جاتا ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دو محور مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان چاروں حصوں کو اربعہ (ربع کی جمع) کہا جاتا ہے اور انھیں مخالف سمت ساعت میں Q_1، Q_2، Q_3، Q_4 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مستوی کو یہاں کارتیزی مستوی (رینے ڈیکارٹے) کے نام پر یا مختصات کی مستوی یا X Y مستوی کہتے ہیں، محوروں کو مختصات کے محور کہا جاتا ہے۔

5.2.1 کسی نقطے کا تعین



آیئے دیکھیں کہ مختصات کے نظام میں کسی نقطے کا تعین کس طرح کیا جاتا ہے۔ حسب ذیل گراف پر غور کیجئے۔ گراف پر دو محور کھینچے گئے ہیں۔ جس پر A اور B کوئی دو نقاط ہیں۔ کیا آپ ان کے ربع کے نام بتا سکتے ہیں جن میں A اور B واقع ہیں۔

نقطہ A پہلے ربع Q_1 میں اور نقطہ B تیسرے ربع Q_3 میں واقع ہیں۔ اب ہم A اور B کا محوروں سے فاصلہ دیکھتے ہیں۔ اس کے لئے ہم X محور پر عمود AC اور Y محور پر عمود AD گرائیں گے۔ اسی طرح عمود BE اور BF بھی گرائیں گے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

ہم غور کر سکتے ہیں کہ

(i) نقطہ A کا Y محور سے عمودی فاصلہ جیسے X محور کے مثبت سمت میں ناپا گیا 5 اکائیاں AD=OC= ہوگا اسے ہم A کا x- مختص کہیں گے۔

(ii) نقطہ A کا Y محور سے عمودی فاصلہ جیسے y محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا ہو 3 اکائیاں AC=OD= ہوگا۔ اسے ہم A کا y مختص کہیں گے۔

اس لئے A کے مختصات (5,3) ہوں گے۔

(iii) The perpendicular distance of the point B from the Y-axis measured along the negative direction of X-axis is OE=BF= 4 units. i.e. at –4 on X-axis. We call this as X-coordinate of 'B'.

(iv) The perpendicular distance of the point B from the X-axis measured along the negative direction of Y-axis is OF = EB = 3 units. i.e. at –3 on Y-axis. We call this as Y-coordinate of 'B' and (–4, –3) are coordinates of 'B'.

Now using these distances, how can we locate the point? We write the coordinates of a point in the following method.

(i) The x-coordinate of a point is the distance from origin to foot of perpendicular on X-axis. The x-coordinate is also called the abscissa.

The x-coordinate (abscissa) of P is 2.

The x-coordinate (abscissa) of Q is –3.

(ii) The y-coordinate of a point is the distance from origin to foot of perpendicular on Y-axis.

The y-coordinate is also called the ordinate.

The y-coordinate or ordinate of P is –2.

The y-coordinate or ordinate of Q is 4.

Hence the coordinates of P are (2, –2) and the coordinates of Q are (–3, 4).

So, the coordinates of a point in a plane are unique.

5.2.2 Origin

1. The intersecting point of X-axis and Y-axis is called origin. We take origin as a reference point to locate other points in a plane. Origin is denoted by "O".

Example 1. State the abscissa and ordinate of the following points and describe the position of each point (i) P(8,8) (ii) Q (6,–8).

Solution : (i) P (8,8)

abscissa = 8 (x - coordinate); Ordinate = 8 (y - coordinate)

The point P is at a distance of 8 units from Y-axis measured along positive point of X-axis from origin. As its ordinate is 8, the point is at a distance of 8 units from X-axis measured along positive point of Y-axis from origin.

(ii) Q (6, –8)

abscissa = 6 ; Ordinate = –8

The point Q is at a distance of 6 units from Y-axis measured along positive X-axis and it is at a distance of 8 units from X-axis measured along negative Y-axis.

(iii) نقطہ B کا Y محور سے عمودی فاصلہ جسے X محور کے منفی سمت میں ناپا گیا ہو 4 اکائیاں OE=BF= ہوگا یعنی X محور پر 4-۔ اسے ہم B کا
x مختص کہیں گے۔

(iv) نقطہ B کا X محور سے عمودی فاصلہ جسے Y محور منفی سمت میں ناپا گیا ہو 3 اکائیاں OF=EB= اکائیاں ہوگا یعنی Y محور پر 3- اسے ہم
B کا y مختص کہیں گے اور (4,-3-) نقطہ B کے مختصات ہوں گے۔

ان فاصلوں کا استعمال کرتے ہوئے ہم کس طرح نقطے کا تعین کر سکیں گے۔ ہم حسب ذیل طریقے سے ایک نقطے کے مختصات لکھیں گے۔

(a) نقطے کا x مختص مبدا اور نقطے سے X محور پر گرائے گئے عمود کے قدم تک کا فاصلہ ہے

x مختص کو طولی مختص یا فصلہ abscissa بھی کہتے ہیں۔

P کا x مختص (طولی مختص) 2 ہے۔

Q کا x مختص (طولی مختص) 3- ہے۔

(b) نقطے کا y مختص مبدا اور نقطے سے Y محور پر گرائے گئے عمود کے قدم کا فاصلہ ہے۔

y مختص کو عرض مختص (معین) Ordinate بھی کہتے ہیں۔

P کا y مختص یا عرضی مختص 2- ہے

Q کا y مختص یا عرض مختص 4 ہے

اس لئے p کے مختصات (2,-2) اور Q کے مختصات (3,4-) ہیں۔

اس لئے مختصات کے استعمال سے کسی مستوی میں نقطے کے مقام کا تعین واحد (یکتا) ہوتا ہے۔

5.2.2 مبداء

.1 X محور اور Y محور کا نقطہ تقاطع کو مبدا کہلاتا ہے۔ ہم مستوی میں دیگر نقاط کے تعین کے لئے مبدا کو حوالے کے طور پر لیتے ہیں۔

مثال 1: حسب ذیل نقاط کے x- مختص (فصلہ) اور y- مختص (معین) کی نشاندہی کرتے ہوئے ہر ایک نقطہ کا مقام متعین کیجئے۔

(i) P (8, 8) (ii) Q(6, -8)

حل: (i) P(8, 8)

x- مختص (طولی مختص) =8 y- مختص (عرضی مختص) =8

نقطہ p، y محور سے 8 اکائیوں کے فاصلہ پر موجود ہے جب کہ اسکو مبدے سے X محور کی مثبت سمت میں ناپا جائے۔ چوں کہ اس نقطے کا
y مختص 8 ہے۔ اس لیئے نقطہ مبدے سے Y محور کی مثبت سمت میں X محور سے 8 اکائیوں کے فاصلے پر واقع ہے

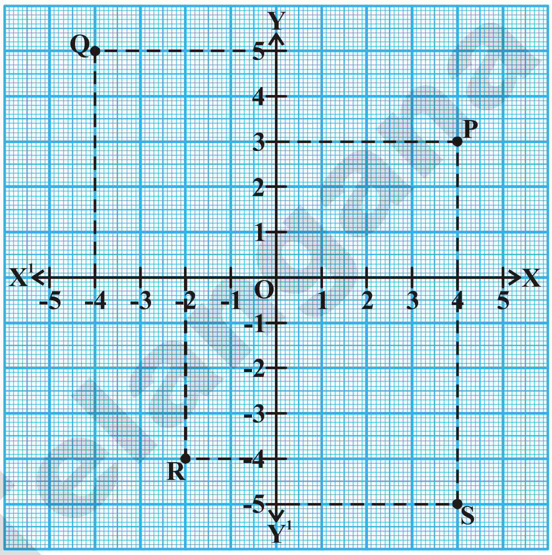
II۔ Q(6,-8)

x = 6 مختص ، y = -8 مختص

نقطہ Q، Y محور سے 6 اکائیوں کے فاصلے پر جب کہ اسے مبدے سے X محور کی مثبت سمت میں اور Y محور کی شکل کی منفی سمت میں
X محور سے 8 اکائیوں کے فاصلے پر موجود ہے۔

Example 2. Write the coordinates of the points marked in the graph.

Solution : 1. Draw a perpendicular line to X-axis from the point P. The perpendicular line touches X-axis at 4 units. Thus abscissa of P is 4. Similarly draw a perpendicular line to Y-axis from P. The perpendicular line touches Y-axis at 3 units. Thus ordinate of P is 3. Hence the Cordinates of P are (4, 3).



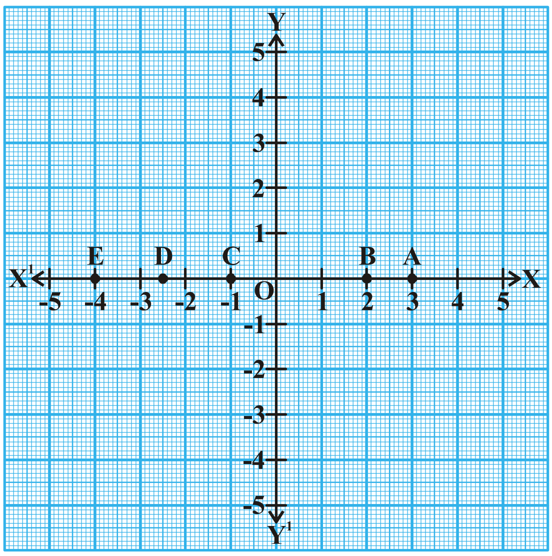
2. Similarly, the abscissa and ordinate of the point Q are –4 and 5 respectively. Hence the coordinates of Q are (–4, 5).

3. The abscissa and ordinate of the point R are –2 and –4 respectively. Hence the coordinates of R are (–2, –4).

4. The abscissa and ordinate of the point S are 4 and –5 respectively. Hence the coordinates of S are (4, –5).

Example-3. Write the coordinates of the points marked in the graph.

Solution : The point A is at a distance of 3 units from the Y-axis and at a distance zero units from the X-axis. Therefore the x coordinate of A is 3 and y-coordinate is 0. Hence the coordinates of A are (3,0).So think and discuss.



(i) The coordinates of B are (2,0). Why?

(ii) The coordinates of C are (–1,0). Why?

(iii) The coordinates of D are (–2.5, 0). Why?

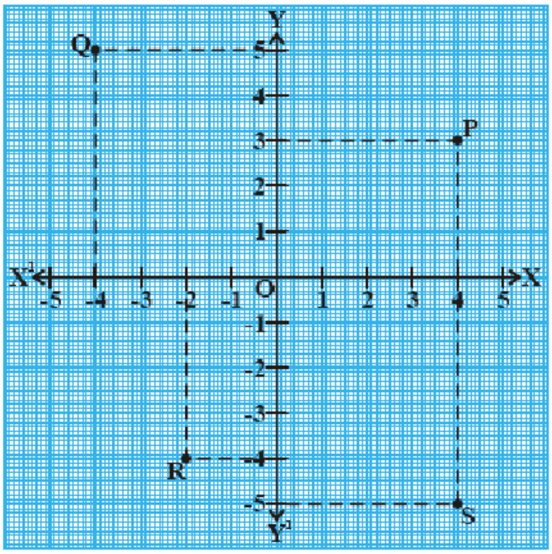
(iv) The coordinates of E are (–4,0) why? What do you observe?

So as observed in figure, every point on the X-axis has no distance from X-axis. Therefore the y coordinate of a point lying on X-axis is always zero.

X-axis is denoted by the equation $y = 0$.

مثال 2: گراف پر نشان زدہ نقاط کے مختصات لکھیئے۔

حل: 1۔ نقطہ P سے X محور پر ایک عمود گرایئے۔ یہ عمودی خط X محور پر 4 اکائیوں پر چھوئے گا۔ اس لیئے P کا x- مختص 4 ہوگا۔ اس طرح P سے Y محور پر بھی ایک عمود گرایئے۔ یہ عمودی خط Y محور پر 3 اکائیوں پر چھوئے گا۔ اس لیئے P کا y- مختص 3 ہوگا۔ لہٰذا P کے مختصات (4 , 3) ہوں گے۔

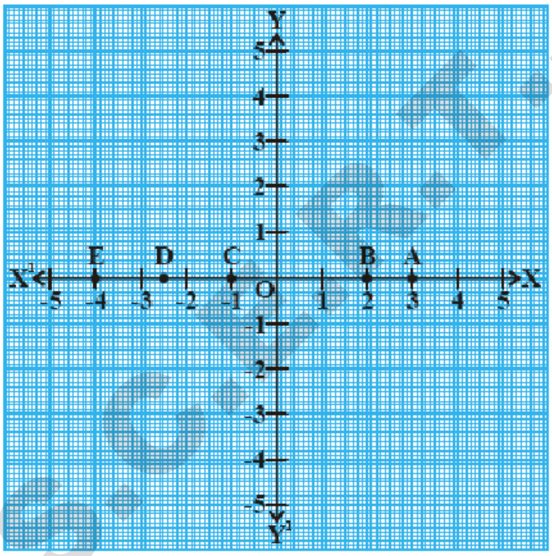


2۔ اس طرح نقطہ Q کے x اور y مختص بالترتیب 4- اور 5 ہوں گے۔ اس لیئے Q کے مختصات (-4,5) ہوں گے۔

3۔ گزشتہ کے حل کے مطابق نقطہ R کے طولی اور عرضی مختص بالترتیب 2- اور 4 ہیں۔ اس لیئے R کے مختصات (-2,4) ہیں۔

4۔ نقطہ S کے معین اور فصلہ بالترتیب 4 اور 5- ہیں۔ اس لیئے S کے مختصات (4,-5) ہوں گے۔

مثال 3: گراف پر بنائے گئے نقاط کے مختصات لکھیے۔



حل: نقطہ A، Y محور سے 3 اکائیوں کے فاصلے پر اور X محور سے صفر اکائیوں کے فاصلے پر واقع ہے۔ اس لئے A کا مختص 3 اور Y مختص O ہے۔ اس لئے A کے مختصات (3,0) ہیں۔

چنانچہ غور کرتے ہوئے بتایئے کہ

(i) B کے مختصات (2,0) ہیں۔ کیوں؟

(ii) C کے مختصات (-1,0) ہیں۔ کیوں؟

(iii) D کے مختصات (-2.5,0) ہیں۔ کیوں؟

(iv) E کے مختصات (-4,0) ہیں۔ کیوں؟

جیسا کہ ہم نے شکل میں دیکھا ہے، X محور پر موجود ہر نقطہ X محور پر کوئی فاصلہ نہیں رکھتا۔ اس لیے X محور پر موجود کسی نقطے کا Y مختص ہمیشہ صفر رہے گا۔

X محور کو مساوات Y=0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

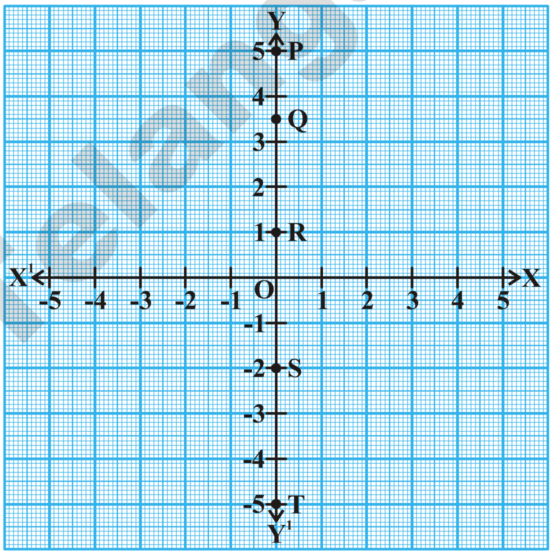
Do this

Among the points given below some of the points lie on X-axis. Identify them.

(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

Example-4. Write the coordinates of the points marked in graph.

Solution :



(i) The point P is at a distance of +5 units from the X-axis and at a distance zero from the Y-axis. Therefore the x-coordinate of P is 0 and y-coordinate is 5. Hence the coordinates of P are (0,5).

Think and discuss :

(ii) The coordinates of Q are (0, 3.5), why?

(iii) The coordinates of R are (0,1), why?

(iv) The coordinates of S are (0, –2), why?

(v) The coordinates of T are (0, –5), why?

Since every point on the Y-axis is at a zero distance from the Y-axis, the x-coordinate of the point lying on Y-axis is always zero. Y-axis is given by the equation $x = 0$.

5.2.3 Coordinates of Origin

The point O lies on Y-axis. Its distance from Y-axis is zero. Hence its x-coordinate is zero. Also it lies on X-axis. Its distance from X-axis is zero. Hence its y-coordinate is zero.

Therefore the coordinates of the origin ‘O’ are (0, 0).

Try These

1. Which axis the points such as $(0, x)$ $(0, y)$ (0, 2) and (0, –5) lie on? Why ?
2. Write the general form of the points which lie on X-axis.

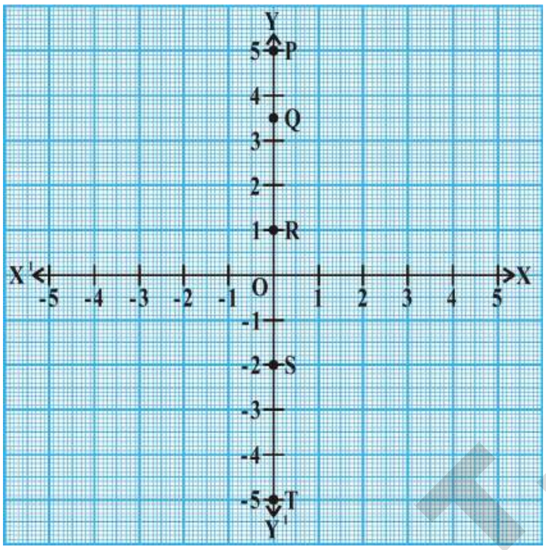
یہ کیجیے

.1 ذیل میں دیئے گئے نقاط میں سے چند نقاط X محور پر پائے جاتے ہیں،ان کی شناخت کیجئے۔

(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

مثال4۔ گراف پر نشان زدہ نقاط کے مختصات لکھئے۔

حل:



(i) نقطہ X،P محور سے 5+ اکائیوں کے فاصلے پر اور Y محور پر صفر فاصلے پر موجود ہے۔اس لیئے P کا X مختص 0 اور Y مختص 5 ہے۔اس لئے P کے مختصات (0,5) ہیں۔

غور کرتے ہوئے بتایئے کہ

(ii) Q کے مختصات (0,3.5) ہیں کیوں؟

(iii) R کے مختصات (0,1) ہیں کیوں؟

(iv) S کے مختصات (0,-2) ہیں کیوں؟

(v) T کے مختصات (0,-5) ہیں کیوں؟

چوں کہ Y محور پر موجود ہر نقطے کا Y محور کے ساتھ کوئی فاصلہ نہیں ہے۔اس لئے Y محور پر موجود نقطے کا X مختص ہمیشہ صفر رہے گا۔Y محور کو مساوات $x=0$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

5.2.3 مبدے کے مختصات

نقطہ Y،0 محور پر واقع ہے۔اس کا Y محور سے فاصلہ صفر ہے۔اس لئے اس کا X مختص صفر ہے۔علاوہ ازیں یہ نقطہ X محور پر بھی واقع ہے۔اس لئے اس کا X محور سے فاصلہ صفر ہے۔اس لئے اس کا Y مختص صفر ہے۔

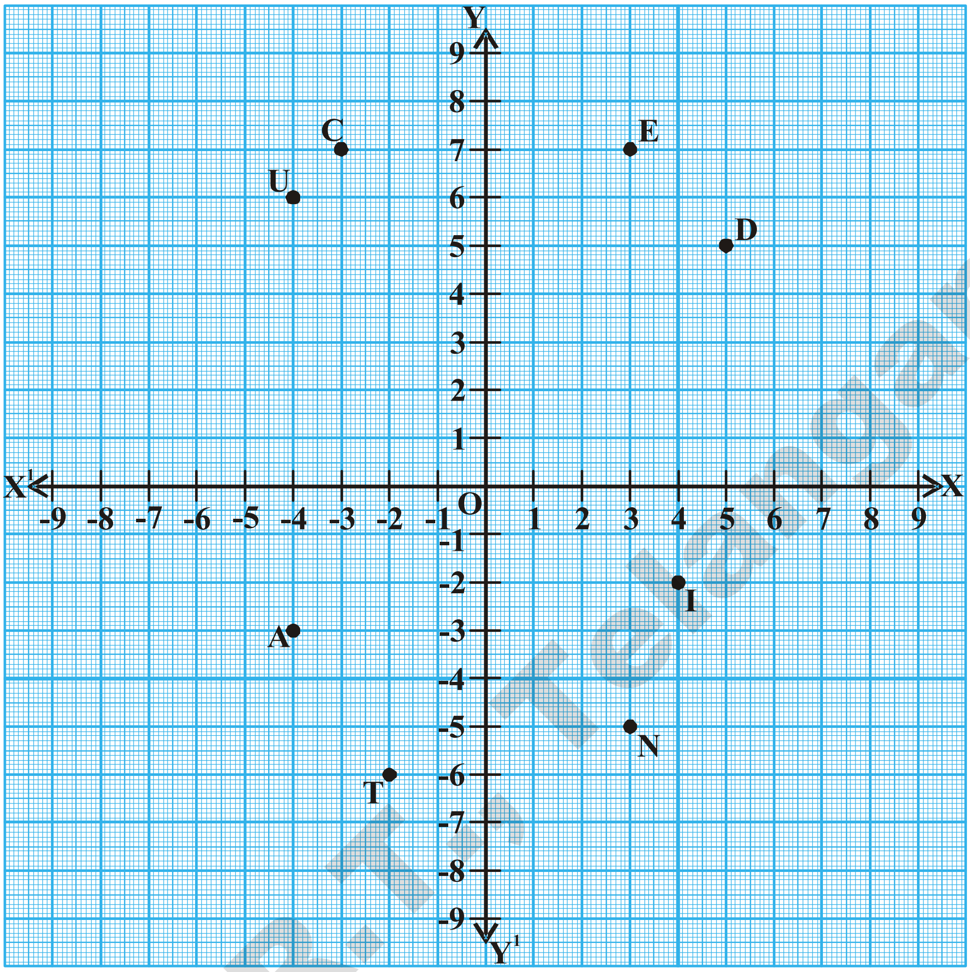
اس لئے مبدا ' O ' کے مختصات (0,0) ہوں گے۔

کوشش کیجیے

.1 نقاط (0,x)،(0,y)،(0,2) اور (0,-5) کس محور پر ہیں؟ کیوں؟

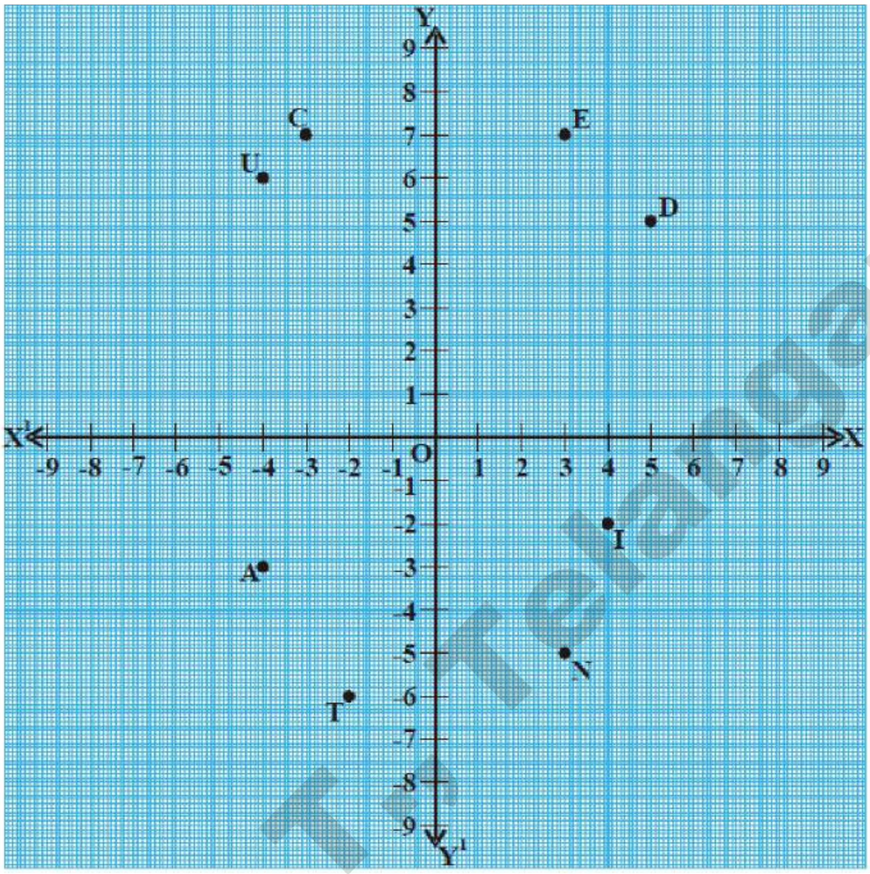
.2 X محور پر پائے جانے والے نقاط کی عام شکل کیا ہوگی؟

Example 5. Complete the table based on the following graph.



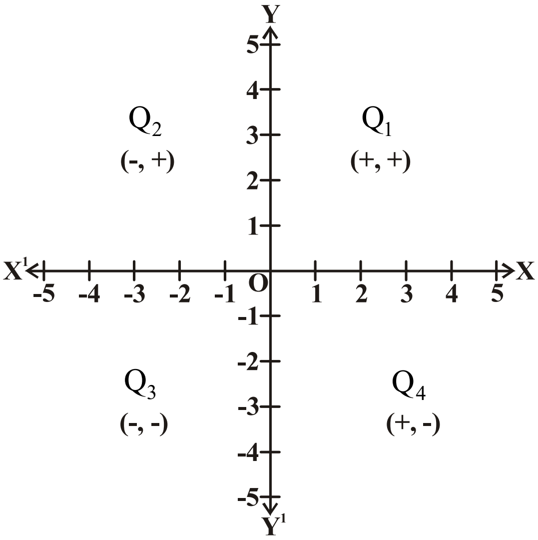
Point	Abscissa	Ordinate	Co-ordinates	Quadrant	Signs of co-ordinates
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	−4	6	U (−4,6)	.....	(−,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	−4	−3	A (−4, −3)	.....	(−,−)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	−2	I (4, −2)	.....	(+,−)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

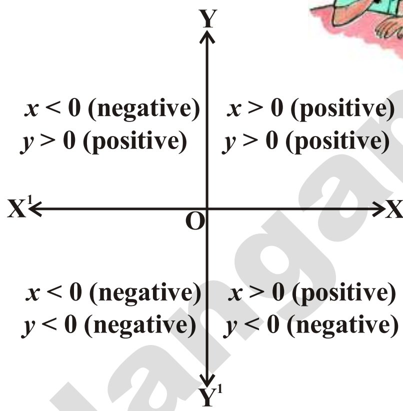
مثال 5۔ حسب ذیل گراف کی مدد سے دیے گئے جدول کو مکمل کیجئے۔



نقطہ	معین	فصلہ	مختصات	ربع	مختصات کی علامتیں
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	–4	6	U (–4,6)	.....	(–,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	–4	–3	A (–4, –3)	.....	(–,–)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	–2	I (4, –2)	.....	(+,–)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

From the above table you may have observed the following relationship between the signs of the coordinates of a point and the quadrant of a point in which it lies.





Exercise 5.2

1. Write the quadrant in which the following points lie.

   i) $(-2, 3)$ ii) $(5, -3)$ iii) $(4, 2)$ iv) $(-7, -6)$

   v) $(0, 8)$ vi) $(3, 0)$ vii) $(-4, 0)$ viii) $(0, -6)$

2. Write the abscissae and ordinates of the following points.

   i) $(4, -8)$ ii) $(-5, 3)$ iii) $(0, 0)$ iv) $(5, 0)$

   v) $(0, -8)$

   Note : Plural of abscissa is abscissae.

3. Which of the following points lie on the axes? Also name the axis.

   i) $(-5, -8)$ ii) $(0, 13)$ iii) $(4, -2)$ iv) $(-2, 0)$

   v) $(0, -8)$ vi) $(7, 0)$ vii) $(0, 0)$

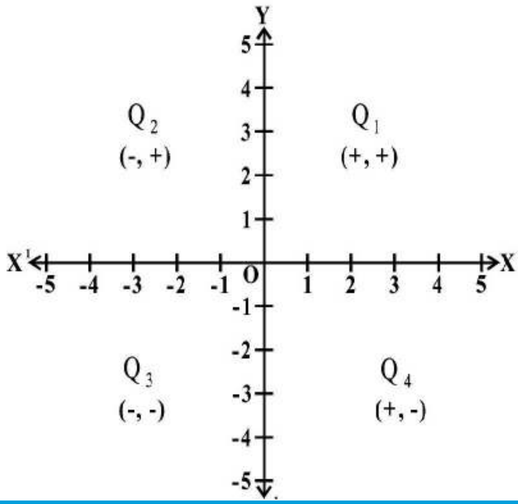
4. Write the following based on the graph.

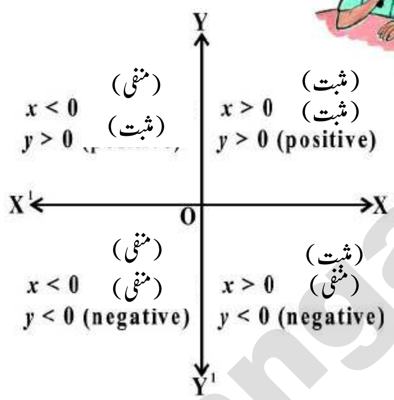
   i) The ordinate of L

   ii) The ordinate of Q

   iii) $(-2, -2)$ is denoted by

مندرجہ بالا جدول سے آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ ایک نقطہ کے مختصات کی علامتوں اور وہ نقطہ جس ربع میں پایا جاتا ہے اس کے درمیان کیا رشتہ ہے۔





مشق 5.2

1. ربع Quadrant لکھئے جس میں حسب ذیل نقاط موجود ہیں۔

i) $(-2, 3)$ ii) $(5, -3)$ iii) $(4, 2)$ iv) $(-7, -6)$

v) $(0, 8)$ vi) $(3, 0)$ vii) $(-4, 0)$ viii) $(0, -6)$

2. حسب ذیل نقاط کے طولی اور عرضی مختص کیا ہیں۔ لکھئے؟

i) $(4, -8)$ ii) $(-5, 3)$ iii) $(0, 0)$ iv) $(5, 0)$

v) $(0, -8)$

3. حسب ذیل میں سے کون سے نقاط محوروں پر پائے جاتے ہیں؟ محور کا نام بتائیے۔

i) $(-5, -8)$ ii) $(0, 13)$ iii) $(4, -2)$ iv) $(-2, 0)$

v) $(0, -8)$ vi) $(7, 0)$ vii) $(0, 0)$

4. گراف دیکھتے ہوئے حسب ذیل کے جوابات لکھئے۔

(i) L کا عرضی مختص (Y مختص)

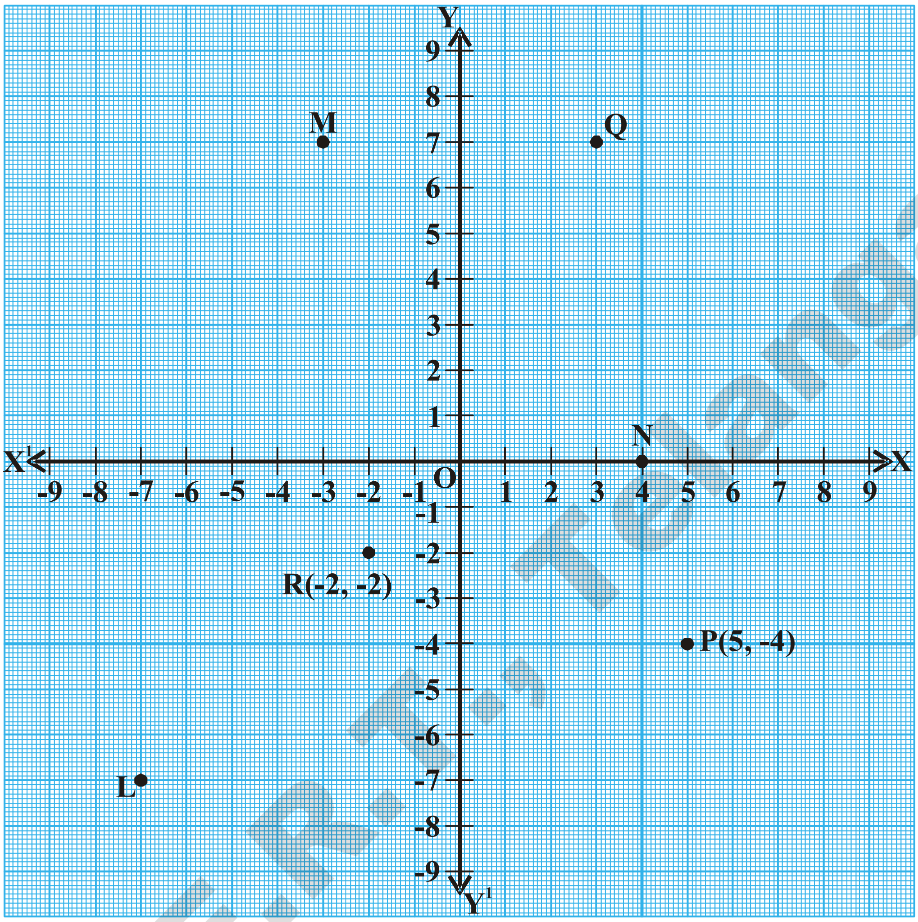
(ii) Q کا عرضی مختص (Y مختص)

(iii) نقطہ (-2,2) سے ظاہر کیا گیا نقطہ

iv) (5, –4) is denoted by

v) The abscissa of N

vi) The abscissa of M



5. State True or False, if 'false' write correct statement.

i. In the Cartesian plane the horizontal line is called Y - axis.

ii. In the Cartesian plane, the vertical line is called Y - axis.

iii. The point which lies on both the axes is called origin.

iv. The point (2, –3) lies in the third quadrant.

v. (–5, –8) lies in the fourth quadrant.

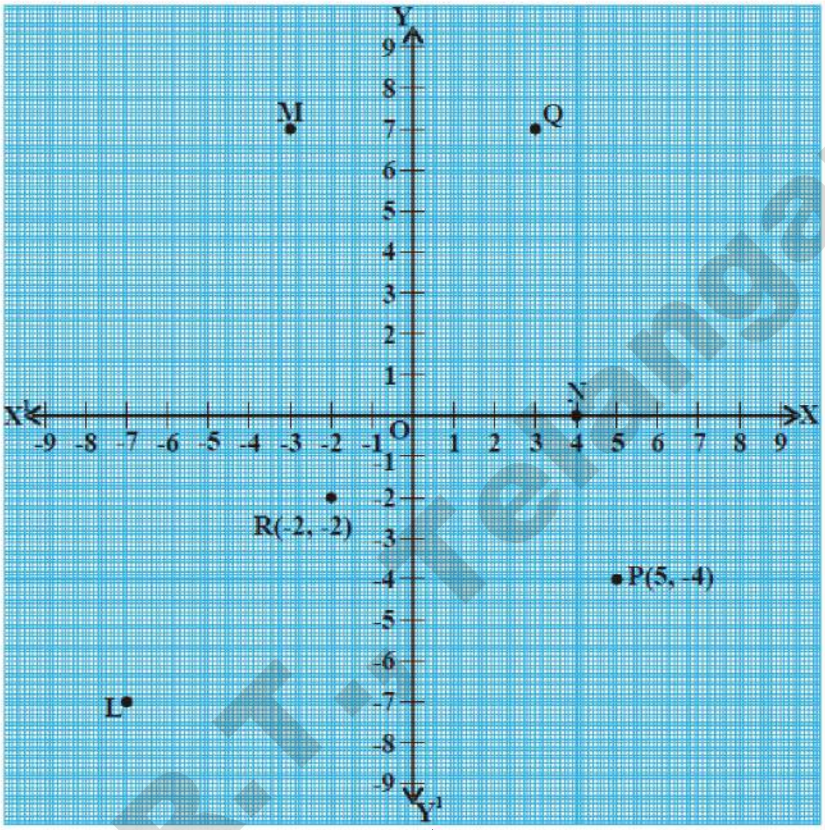
vi. The point (–x , –y) lies in the first quadrant where x < 0 , y < 0.

6. Plot the following ordered pairs on a graph sheet. What do you observe?

i.. (1, 0), (3 , 0), (–2 , 0), (–5, 0), (0, 0), (5, 0), (–6, 0)

ii. (0, 1), (0 , 3), (0 , –2), (0, –5), (0, 0), (0, 5), (0, –6)

(iv) نقطہ (5,-4) سے ظاہر کیا گیا
(v) N کا طولی مختص (x مختص)
(vi) M کا طولی مختص (X مختص)



.5 صادق یا کاذب بیان کیجئے۔ اگر کاذب ہو تو صحیح بیان لکھیے۔

(i) کارتیزی مستوی میں افقی خط کو Y محور کہتے ہیں۔ ( )

(ii) کارتیزی مستوی میں عمودی خط کو Y محور کہتے ہیں۔ ( )

(iii) وہ نقطہ جو دونوں محوروں پر پایا جاتا ہے، مبدا کہلاتا ہے۔ ( )

(iv) (2,-3) ربع سوم (Q_3) میں پایا جاتا ہے ( )

(v) (-5,-8) ربع چہارم (Q_4) میں پایا جاتا ہے ( )

(vi) $(-x,-y)$ ربع اول میں پایا جاتا ہے جہاں $x<0$ ، $y < 0$ ( )

.6 گراف پیپر پر حسب ذیل مرتب جوڑوں کا تعین کیجئے۔ آپ کیا غور کرتے ہیں؟

i.. (1, 0), (3 , 0), (−2 , 0), (−5, 0), (0, 0), (5, 0), (−6, 0)

ii (0, 1), (0 , 3), (0 , −2), (0, −5), (0, 0), (0, 5), (0, −6)

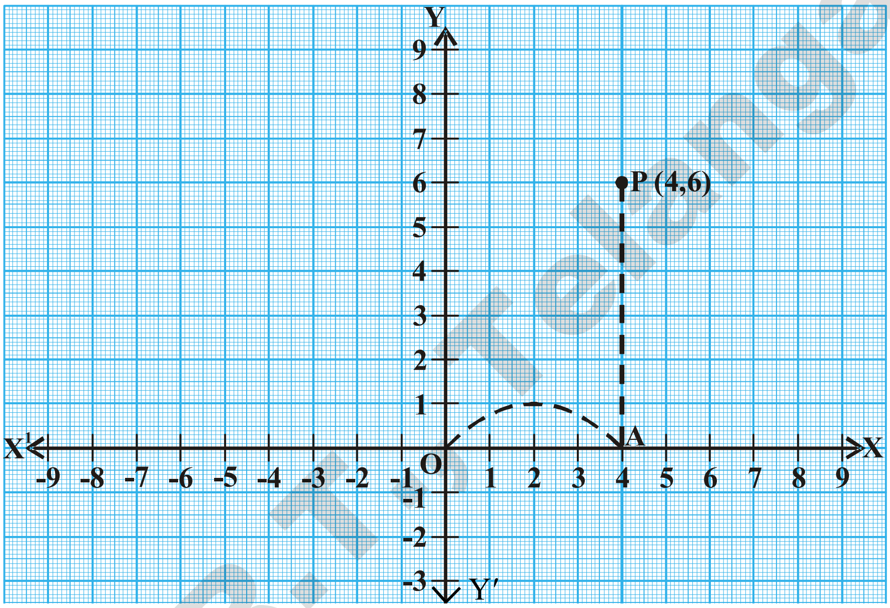
5.3 Plotting a point on the Cartesian plane (when its co-ordinates are given)

So far we have seen how to read the positions of points marked on a Cartesian plane. Now we shall learn to mark the point if its co-ordinates are given.

For instance how do you plot a point (4, 6)?

Can you say in which quardrant the point P lies?

We know that the abscissa (x-coordinate) is 4 and y-coordinate is 6.



∴ P lies in the first quadrant

The following process shall be followed in plotting the point P (4, 6) in the graph sheet.

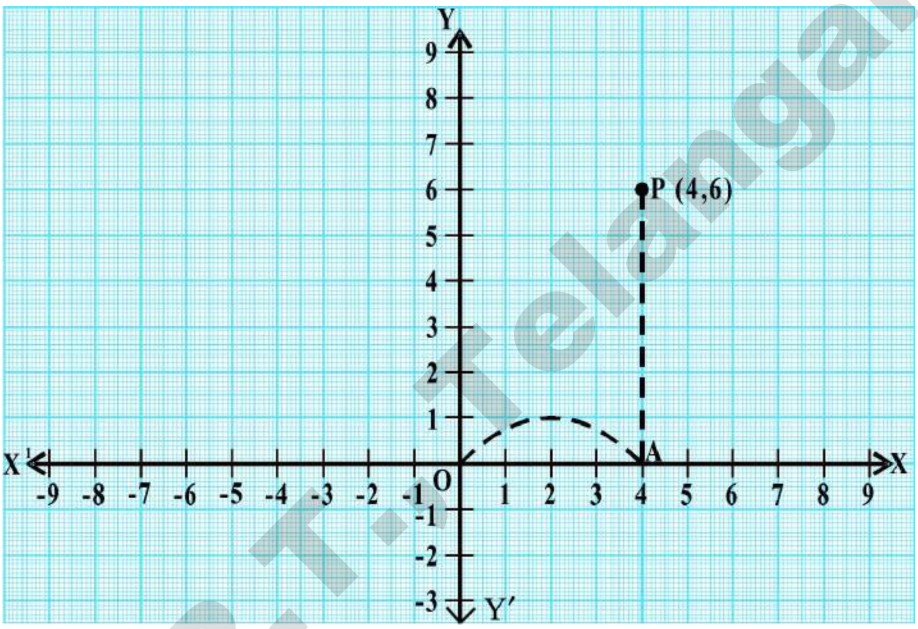
- Draw two number lines perpendicular to each other intersecting at their zeroes on a graph paper. Name the horizontal line as X-axis and the vertical line as Y-axis and name the intersecting point of both the lines as Origin 'O'.
- Keep the x-coordinate in mind, start from zero, i.e. from the Origin.
- Move 4 units along positive part of X-axis i.e. to its right side and mark the point A.
- From A move 6 units upward along the line parallel to positive part of Y-axis.
- Locate the position of the point 'P' as (4, 6).

The above process of marking a point on a Cartesian plane using their co-ordinates is called "plotting the point".

5.3 کارتیزی مستوی پر کسی نقطے کا تعین جب کہ اس کے مختصات دیئے گئے ہیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی کارتیزی مستوی پر نقاط کے مقامات کو کس طرح پڑھا یا جاتا ہے۔اب ہم کسی نقطے کی نشاندہی کرنا سیکھیں گے۔ اگر اس کے مختصات دیئے جائیں۔

مثال 6۔ مثال کے طور پر آپ نقطہ (4,6) کا کس طرح تعین کریں گے۔
کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ نقطہ P کس ربع میں ہے۔
ہم جانتے ہیں کہ طولی مختص (X مختص) 4 اور عرضی مختص (Y مختص) ہے۔



∴ نقطہ P ربع اول میں موجود ہے۔

گراف پر نقطہ P(4,6) کے تعین کے لئے حسب ذیل طریقہ کار پر عمل کیا جائے گا۔

☆ ایک گراف پیپر پر دو عمودوار عددی خط کھینچیے جو ان کے صفر پر ایک دوسرے سے ملتے ہیں۔افقی خط کو X محور اور انتصابی (عمودی) خط کو Y محور کا نام دیجئے۔اور دونوں خطوط کے ملنے کے مقام کو مبداء ' O ' سے نشاندہی کیجیے۔

☆ X مختص کو ذہن میں رکھتے ہوئے صفر (مبدا) سے گننا شروع کیجیے۔

☆ X محور کی مثبت سمت میں 4 اکائی آگے جائیے۔یعنی صفر سے سیدھی جانب اور نقطہ A لگائیے۔

☆ A سے 6 اکائیاں اوپر مثبت Y محور کی سمت اس کے متوازی جائیے۔

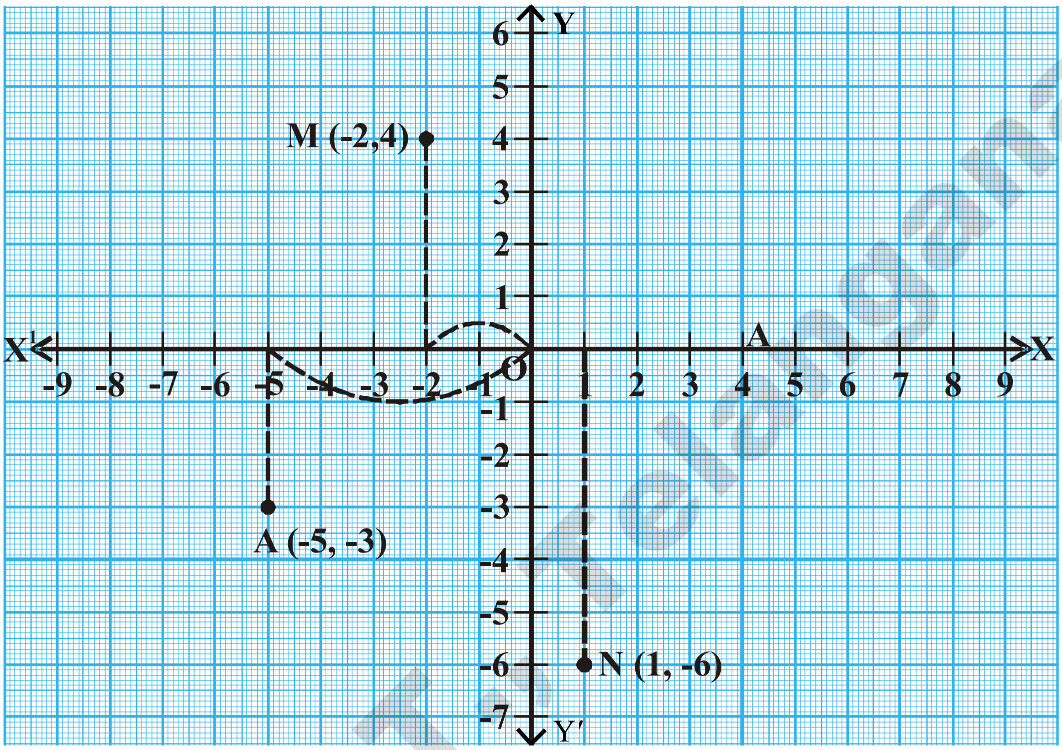
☆ نقطہ P کا تعین (4,6) کے طور پر کیجیے۔

مذکورہ طریقے سے کسی کارتیزی مستوی میں x اور y مختصات کے استعمال سے کسی نقطہ کا تعین، نقطہ کی پلاٹنگ کہا جاتا ہے۔

Example 6. Plot the following points in the Cartesian plane

(i) M (–2, 4), (ii) A (–5, -3), (iii) N (1, –6)

Solution : Draw the X-axis and Y-axis on the graph.



(i) Can you say in which quadrant the point M lie?

Since $x < 0$, $y >$ o, It lies in the second quadrant. Let us now locate its position.

M (–2,4) : start from the origin, move 2 units from zero along the negative part of X-axis i.e. on its left side.

From there move 4 units along the line parallel to positive Y-axis i.e. upwards.

Name it as M (–2,4).

(ii) A (–5, –3) :

The point A lies in the third quadrant. Start from zero, the Origin. Move 5 units from zero to its left side that is along the negative part of X-axis.

From there move 3 units along a line parallel to negative part of Y-axis i.e. downwards. Name it as A (–5, –3)

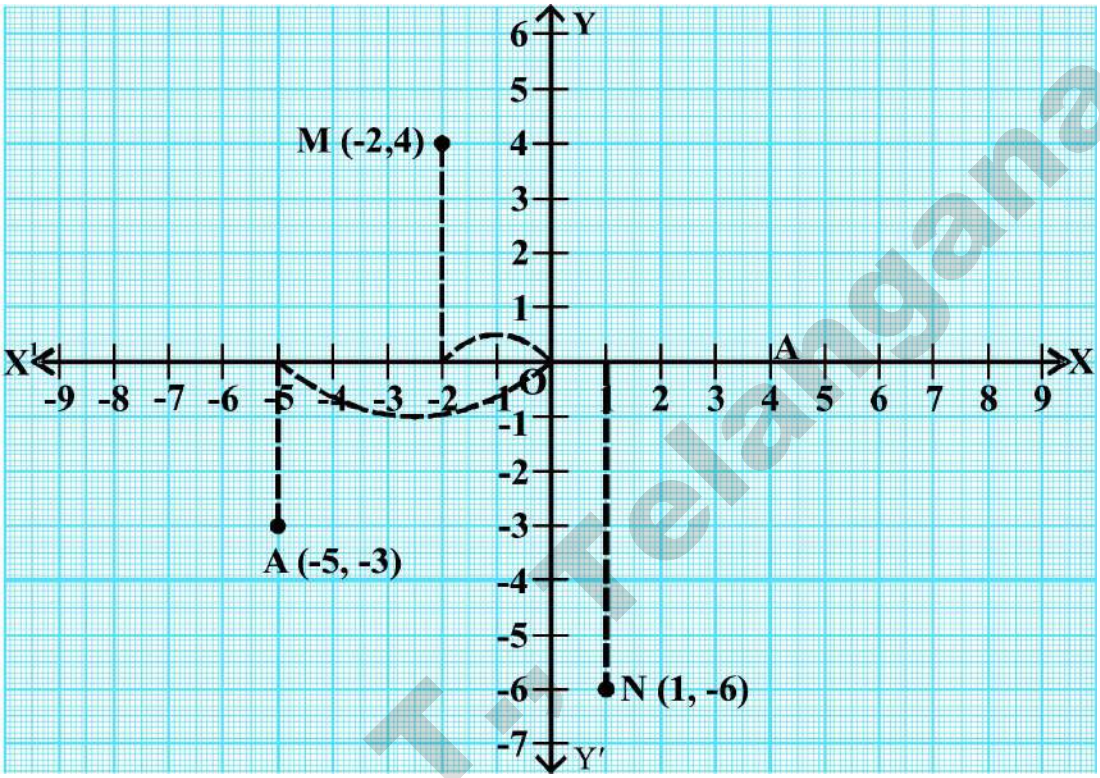
(iii) N (1, –6): In which quadrant does it lie?

The point N lies in the fourth quadrant, start from zero i.e. origin. Move 1 unit along positive part of X-axis i.e. to the right side of zero. From there move 6 units along a line parallel to negative Y-axis i.e. downwards, and name the point as N (1, –6)

مثال 7۔ کارتیزی مستوی پر حسب ذیل نقاط کا تعین کیجئے۔

(i) M (-2 , 4) (ii) A (-5 , -3) (iii) N (1 , -6)

حل: X محور اور Y محور بنائیے۔



(i) کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ M کونسے ربع میں واقع ہوگا؟

کیوں کہ X<0 ،Y>0 یہ نقطہ دوسرے ربع میں واقع ہوگا۔ آیئے اس نقطہ کے مقام کا تعین کرتے ہیں۔

M(-2 , 4): صفر سے شروع کیجئے۔ 'O' سے شروع کرتے ہوئے منفی X محور کی طرف بائیں جانب 2 اکائیاں جایئے

یہاں سے مثبت Y محور کے متوازی یعنی اوپر کی جانب 4 اکائیاں جایئے اور اسے M(-2, 4) لکھئے۔

(ii) A(-5 , -3) یہ نقطہ تیسرے ربع میں واقع ہوگا۔ صفر سے مبدا پر شروع کیجئے۔

O سے 5 اکائیاں بائیں جانب یعنی منفی X محور کے متوازی چلئے۔

یہاں سے منفی Y کے متوازی محور یعنی نیچے کی سمت 3 اکائیاں جایئے۔ اور اس کی نشاندہی A(-5,-3) کے طور پر کیجئے۔

(iii) N(1 , -6) کس ربع میں ہوتا ہوگا۔ یہ نقطہ چوتھے ربع میں واقع ہوگا۔ مبدہ پر صفر سے شروع کیجئے۔

مثبت X محور کے متوازی یعنی صفر کے سیدھی جانب 1 اکائی چلئے۔

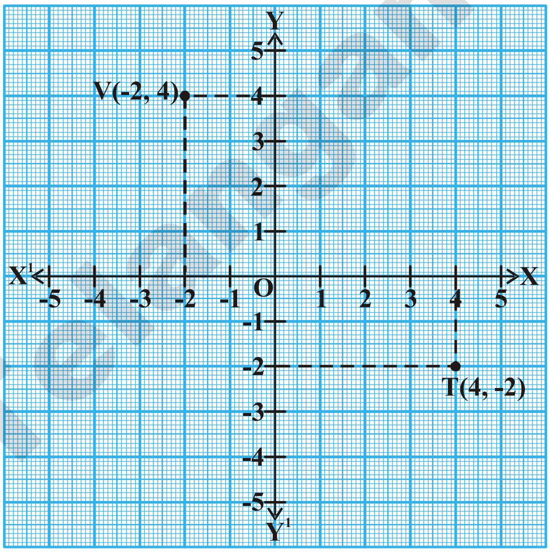
یہاں سے منفی Y محور کے متوازی یعنی نیچے کی جانب 6 اکائیاں چلئے۔ اس نقطہ پر N(1,-6) لکھئے۔

Do This

Plot the following points on a Cartesian plane.

1. B (−2, 3)   2. L (5, −8)   3. U (6, 4)   4. E (−3, −3)

Example 7 : Plot the points T(4, −2) and V(−2, 4) on a cartesian plane. Whether these two coordinates locate the same point?



Solution : In this example we plotted two points T (4, −2) and V(−2, 4)

Are the points (4, −2) and (−2, 4) distinct or same? Think.

We see that (4, −2) and (−2, 4) are at different positions. Repeat the above activity for the points P (8, 3), Q(3, 8) and A (4, −5), B(−5 , 4) and say whether the point (x, y) is different from (y, x) or not ?

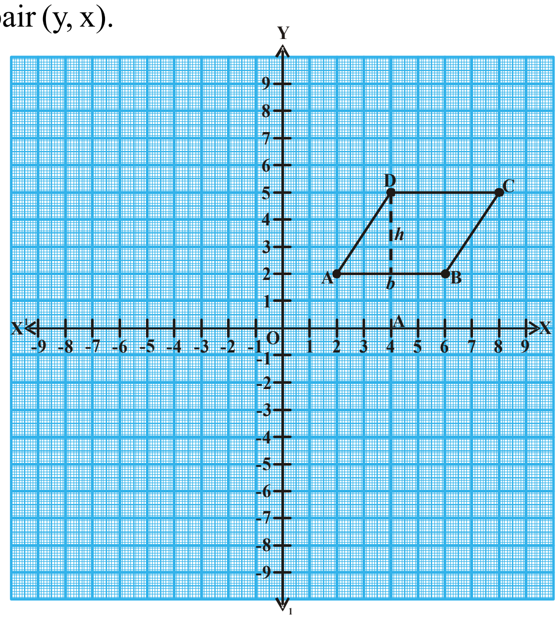
From the above plotting it is evident that the position of (x, y) in the Cartesian plane is different from the position of (y, x). i.e. the order of x and y is important in (x, y).

Therefore (x, y) is called an ordered pair.

If $x \neq y$, the ordered pair $(x, y) \neq$ ordered pair (y, x).

However if $x = y$, then $(x, y) = (y, x)$

Example 8: Plot the points A(2, 2), B(6, 2), C (8, 5) and D (4, 5) in a graph sheet. Join all the points to make it a parallelogram. Find the area of the parallelogram.



Solution: All the given points lie in Q_1.

from the graph b = AB = 4units.

height h = 3 units

Area of parallelogram

$= \text{base} \times \text{height}$

$= 4 \times 3 = 12 \text{ unit}^2$

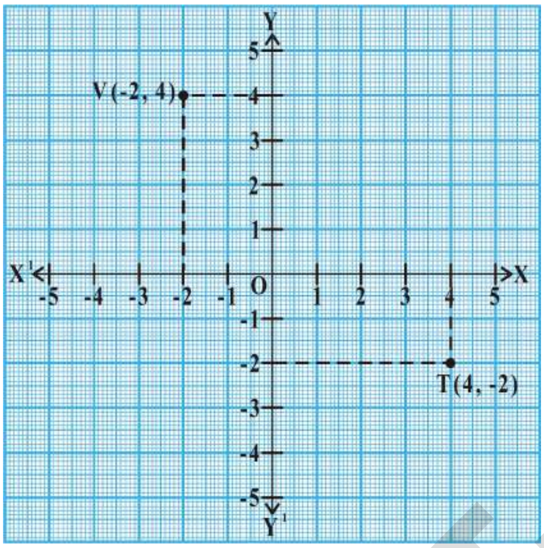
یہ کیجیے

کارتیزی مستوی پر حسب ذیل نقاط کا تعین کیجیے۔

1. B (−2, 3)	2. L (5, −8)	3. U (6, 4)	4. E (−3, −3)

مثال 8۔ نقاط T(4 , -2) اور V(-2 , 4) کو کارتیزی مستوی پر متعین کیجیے۔ کیا یہ مختصات ایک ہی نقطہ کی نشاندہی کرتے ہیں۔

حل: اس مثال میں ہم کو دو نقاط T(4 , -2) اور V(-2 , 4) کا تعین کرنا ہے۔



کیا یہ نقاط T(4 , -2) اور V(-2 , 4) مختلف ہیں یا ایک ہیں؟ سوچیے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ (+4 , -2) اور (-2 , 4) مختلف مقامات پر ہیں۔ اس عمل کو نقاط P(8,3)، Q(3,8) اور A(4,-5)، B(-5,4) سے دہرائیے بتائیے کہ نقطہ (x,y) نقطہ (y,x) سے مختلف ہے یا نہیں۔

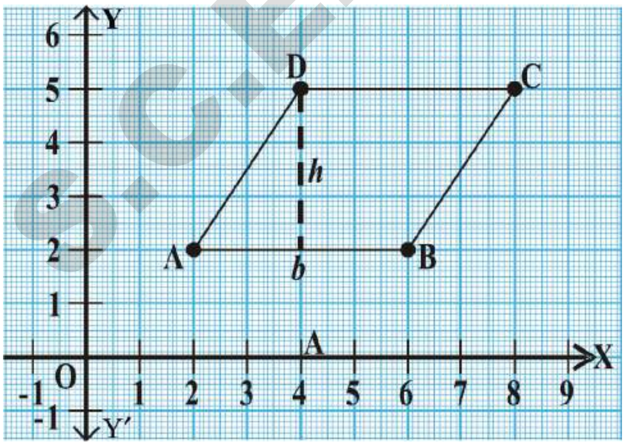
مذکورہ پلاٹنگ سے یہ واضح ہو جاتا ہے کہ کارتیزی مستوی (x,y)، (y,x) سے مختلف ہوتا ہے۔ یعنی x اور y کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔

لہٰذا (x,y) کو مرتب جوڑ (Ordered Pair) کہتے ہیں۔

اگر $x \neq y$ ہو تو مرتب جوڑ $(x, y) \neq (y,x)$ مرتب جوڑ کے، تاہم اگر x=y تب (x,y)=(y,x)

مثال 9: نقاط A(2,2)، B(6,2)، C(8,5) اور D(4,5) کو ترسیمی کاغذ پر متعین کرو؟ ان نقاط کو ملاتے ہوئے متوازی الاضلاع بناؤ اور اس کا رقبہ دریافت کرو؟

حل:



تمام نقاط پہلے ربع میں واقع ہوں گے۔

(ترسیم) گراف کی مدد سے b = AB = 4 اکائیاں

بلندی h = 3 اکائیاں

متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × ارتفاع

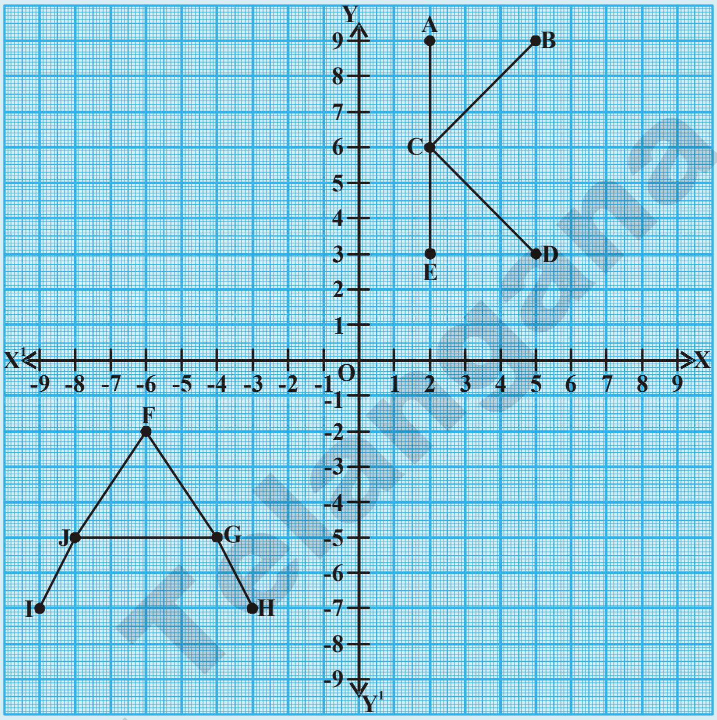
= 4×3

= 12 مربع اکائیاں

Do This

(i) Write the coordinates of the points A, B, C, D, E.

(ii) Write the coordinates of F, G, H, I, J.



Exercise 5.3

1. Write the following points as a orderpair and plot in the Cartesian plane.

x	2	3	–1	0	–9	–4
y	–3	–3	4	11	0	–6
(x, y)						

2. Are the positions of (5, –8) and (–8, 5) same? Justify your answer.

3. What can you say about the position of the points (1, 2), (1, 3), (1, –4), (1, 0), and (1, 8). Locate on a graph sheet .

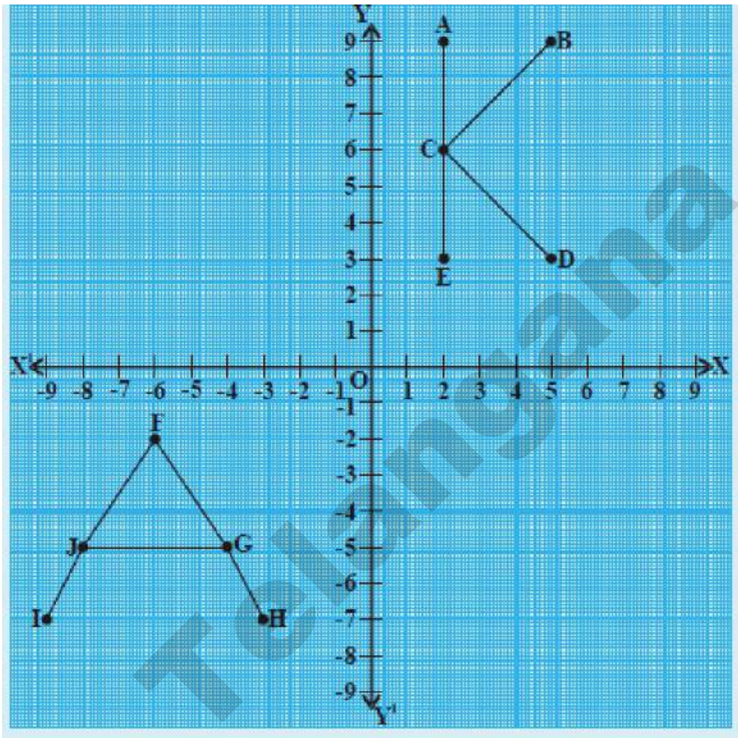
4. What can you say about the position of the points (5, 4), (8, 4), (3, 4), (0, 4), (–4, 4), (–2, 4)? Locate the points on a graph sheet. Justify your answer.

5. Plot the points (0, 0) (0, 3) (4, 3) (4, 0) in graph sheet. Join the points in order with straight lines to make a rectangle. Find the area of the rectangle thus formed.

یہ کیجیے

(i) نقاط A، B، C، Dاور E کے مختصات لکھیے۔

(ii) نقاط F،G،H،I،J کے مختصات لکھیے۔



مشق 5.3

1. کارتیزی مستوی میں ذیل کے نقاط متعین کیجیے جن کے x اور y مختصات دیئے گئے ہیں۔

x	2	3	−1	0	−9	−4
y	−3	−3	4	11	0	−6
(x, y)						

2. کیا نقاط (8-,5) اور (8,5-) مساوی ہیں۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

3. نقاط (1,2)، (1,3)، (1,-4)، (1,0) اور (1,8) کے مقام کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔ ترسیمی کاغذ پر متعین کیجیے۔

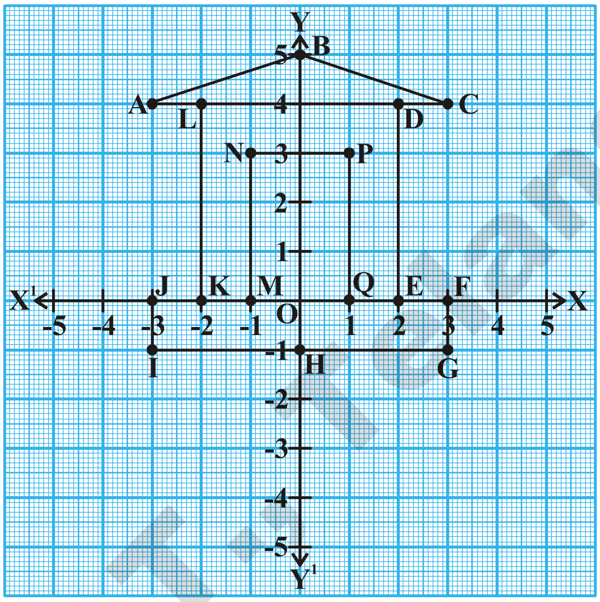
4. نقاط (2,4-)(4,4-)(0,4)(3,4)(8,4)(5,4) کے مقام کے بارے میں آپ کیا کہیں گے ان نقاط کو ترسیمی کاغذ پر متعین کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

5. (0,0)، (0,3)، (4,3)، (4,0) کو ترسیمی کاغذ پر ظاہر کیجیے انہیں خطوط مستقیم سے ملاتے ہوئے مستطیل بنائیے۔ مستطیل کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔

6. Plot the points (2, 3), (6, 3) and (4, 7) in a graphsheet. Join them to make it a triangle. Find the area of the triangle thus formed.

7. Plot at least six points in a graph sheet, each having the sum of its coordinates equal to 5. **Hint** : (–2, 7) (1, 4) ....

8. Look at the graph. Write the coordinates of the points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, L, M. N, P, O and Q.



9. In a graph Sheet Plot each pair of points, join them by line segments

i. (2, 5), (4, 7)	ii. (–3, 5), (–1, 7)	iii. (–3, –4), (2, –4)
iv. (–3, –5), (2, –5)	v. (4, –2), (4, –3)	vi. (–2, 4), (–2, 3)
vii. (–2, 1), (–2, 0)	viii. (4, 7), (4, –3)	ix. (4,–2), (2, –4)
x. (4, –3), (2,–5)	xi. (2, 5), (2, –5)	xii. (–3, 5), (–3, –5)
xiii. (–3, 5), (2, 5)	xiv. (–1, 7) (4, 7)	What do you observe

10. Plot the following pairs of points on the axes and join them with line segments.

(1, 0), (0, 9); (2, 0), (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

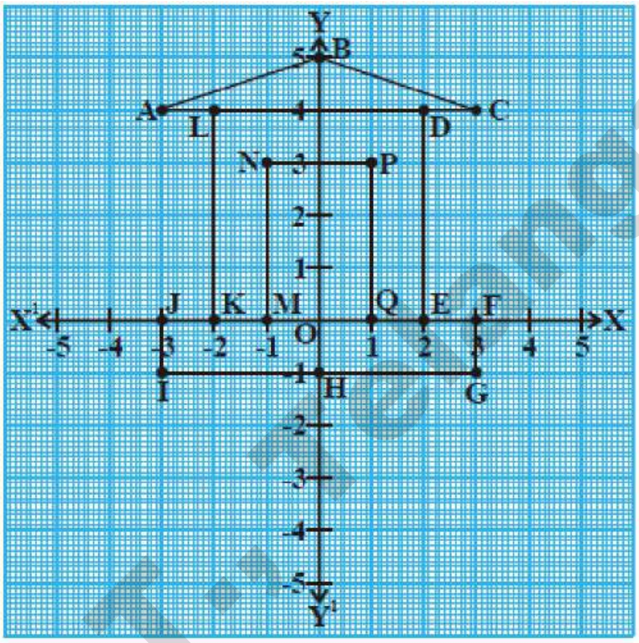
(5, 0) (0, 5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2); (9, 0) (0, 1).

What do you observe?

6. نقاط (2,3)، (6,3) اور (4,7) کو گراف شیٹ پر ظاہر کیجئے انہیں خط مستقیم سے ملاتے ہوئے مثلث بنائیں اور اس کا رقبہ معلوم کریں۔

7. گراف شیٹ پر کم از کم چھ نقاط لیجئے۔ ہر نقطہ کے مختصات کا حاصل جمع 5 ہونا چاہیئے۔
اشارہ : (1,4) , (-2,7)-----------

8. دی ہوئی ترسیم پر غور کیجئے نقاط A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P اور Q کے مختصات لکھئے۔



9. ترسیمی کاغذ پر نقاط کی جوڑیوں کا تعین کرتے ہوئے انہیں خطوط سے ملایئے۔

i. (2, 5), (4, 7)	ii. (−3, 5), (−1, 7)	iii. (−3, −4), (2, −4)
iv. (−3, −5), (2, −5)	v. (4, −2), (4, −3)	vi. (−2, 4), (−2, 3)
vii. (−2, 1), (−2, 0)	viii. (4, 7), (4, −3)	ix. (4,−2), (2, −4)
x. (4, −3), (2,−5)	xi. (2, 5), (2, −5)	xii. (−3, 5), (−3, −5)
xiii. (−3, 5), (2, 5)	xiv. (−1, 7) (4, 7)	آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

اب آپ ایک عجیب قسم کی شکل حاصل کریں گے۔غور سے دیکھ کر بتایئے کہ وہ کیا ہے؟

10. اس ترسیمی کاغذ پر ذیل کے نقاط کی جوڑیوں کو ملایئے۔

(1, 0), (0, 9); (2, 0), (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);
(5, 0) (0, 5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2); (9, 0) (0, 1).

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

Activity

Study the positions of different cities like Hyderabad, New Delhi, Chennai and Vishakapatnam with respect to longitudes and latitudes on a globe.

Creative Activity

Take a graph sheet and plot the following pairs of points on it and join them in order with line segments.

(–9, 0), (–6, 4), (–2, 5), (2, 4), (5, 0) (–2, 0),

(–2, –8), (–3, –9), (–4, –8).

What do you notice ?

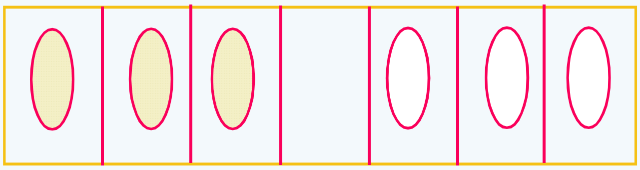
What have we discussed?

- We need two references to locate the exact position of a point in a plane.
- A point or an object in a plane can be located with the help of two perpendicular number lines. One of them is horizontal line (X-axis) and the other is vertical line (Y-axis).
- Cartesian plane is named after Rene Descartes.
- The point of intersection of X-axis and Y-axis is the orgin. Coordinates of orgin are (0, 0)
- The ordered pair (x, y) is different from the ordered pair (y, x).
- The equation of X-axis is given by y = 0.
- The equation of Y-axis is given by x = 0.

S9I4F2

Brain teaser

Look at the cards placed below you will find a puzzle



The white card pieces must change places with the shaded pieces while following these rules : (1) pieces of the same colour cannot jump over another (2) move one piece one space or jump at a time. Find the least number of moves.

Minimum number of moves is between 15 to 20. Can you do better?
To make the game more challanging, increase the number of pieces of cards

مشغلہ

گلوب پر بلحاظ طول بلد وعرض بلد مختلف شہروں جیسے حیدرآباد، نئی دہلی، چینائی اور وشاکھا پٹنم کے مقامات پر غور کیجئے۔

تحقیقی مشغلہ

ذیل کے نقاط کی جوڑیوں کو ترسیم کے کاغذ پر لیتے ہوئے انہیں خطوط سے جوڑ یئے۔

(-9,0) , (-6,4) , (-2,5) , (2,4) (5,0) (-2,0)

(-2,-8) , (-3,-9) , (-4,-8)

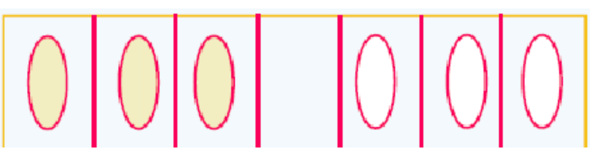
آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

ہم نے کیا سیکھا

- ☆ کسی مستوی میں نقطہ کا تعین کرنے کے لیے ہمیں دو مختصات کی ضرورت ہوتی ہے۔
- ☆ کسی مستوی پر ایک نقطہ یا شئے کا تعین دو عمودوار خطوط سے کیا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک کو افقی خط (X محور) اور دوسرے کو عمودوار خط (Y محور) کہا جاتا ہے۔
- ☆ X اور Y مختصات کی رقوم میں نقاط کا تعین کارتیزی مختصات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ☆ X اور Y محور کا نقطہ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔ (0,0)
- ☆ مرتب جوڑ (X,Y) مرتب جوڑ (Y,X) سے مختلف ہوتا ہے۔
- ☆ X محور کو Y=0 کی مساوات سے ظاہر کرتے ہیں۔
- ☆ Y محور کو X=0 کی مساوات سے ظاہر کرتے ہیں۔

دماغی ورزش

دیئے ہوئے کارڈز پر غور کیجئے۔ آپ کو ایک معمہ حاصل ہوگا۔ سفید کارڈ کو سیاہ کارڈز سے تبدیل کرنا چاہیئے اس سلسلہ میں یہ قواعد ملحوظ رکھنا ضروری ہے۔



(i) ایک ہی رنگ کے کارڈز ایک دوسرے پر سلسلہ وار نہ رکھے جائیں۔ (ii) ایک وقت میں ایک ہی کارڈ کھیلیں یا ایک جگہ لیں۔ اقل ترین چالوں کی گنتی کریں۔

کم از کم 15-20 چالیں ہونی چاہئیں۔ کیا آپ اس سے بہتر کھیل سکتے ہیں؟ اپنے کھیل کو اور زیادہ دلچسپ بنانے کے لیئے کارڈز کی تعداد میں اضافہ کریں۔

Chapter 7

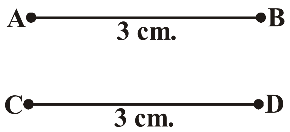
Triangles

P4G7T4

7.1 Introduction

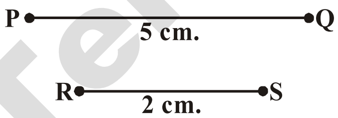
We have drawn figures with lines and curves and studied their properties. Do you remember, how to draw a line segment of a given length? All line segments are not same in size, they can be of different lengths. We also draw circles. What measure do we need and have been used to draw a circle? We need the radius of the circle. We also draw angles equal to the given angle.

We know if the lengths of two line segments are equal then they are congruent.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

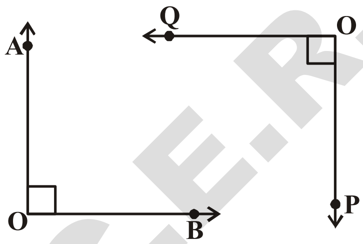
(Congruent)



$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$

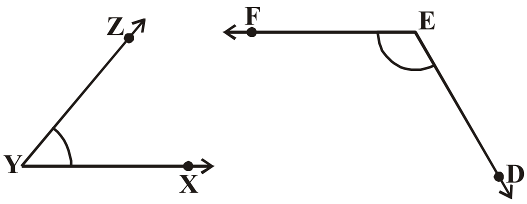
(Non-congruent)

Two angles are congruent, if their angle measure is same.



$\angle AOB \cong \angle POQ$

(Congruent)



$\angle XYZ \ncong \angle DEF$

(Non-congruent)

From the above examples we can say that to make or check whether the figures are same in size or not we need some specific information about the measures describing these figures.

Let's consider a square : What is the minimum information required to say whether two squares are of the same size or not?

Satya said- "I only need the measure of the side of the given squares". If the sides of given squares are equal then the squares are of identical size.

باب 7

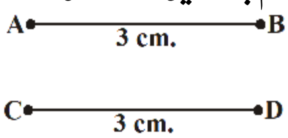
مثلثات

7.1 تعارف

ہم نے خطوط مستقیم اور خطوط منحنی سے بننے والی اشکال کی خصوصیات کے بارے میں وقفیت حاصل کرلی ہے۔ دیئے گئے طول سے خطی قطعہ کو کس طرح کھینچا جاسکتا ہے کیا آپ اس کا اعادہ کرسکتے ہیں؟

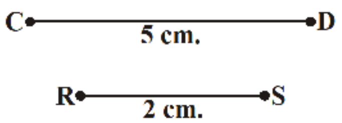
تمام خطی قطعات ایک ہی طرز کے نہیں ہوتے' ان کے مختلف طول ہوسکتے ہیں۔ ہم دائرے بھی بنا سکتے ہیں۔ دائرہ بنانے کے لیے ہمیں کس پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے؟ یہ دائرے کا نصف قطر ہوگا۔ ہم دیئے گئے زاویئے Q پیمائش کے مساوی زاویئے P بھی بناسکے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر دو خطی قطعات مساوی ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں۔



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

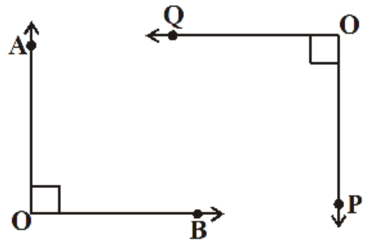
(متماثل)



$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$

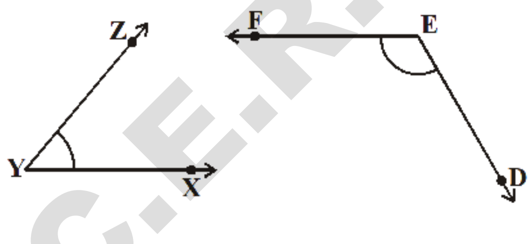
(غیر متماثل)

دو زاویئے متماثل ہوتے ہیں اگر ان زاویوں کی پیمائش مساوی ہو۔



$\angle AOB \cong \angle POQ$

(متماثل)



$\angle XYZ \ncong \angle DEF$

(غیر متماثل)

مندرجہ بالا مثالوں کی مدد سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دی گئی اشکال کی جسامت مساوی ہے یا نہیں؟ اس کے لیے ہمیں چند مخصوص پیمائشات کی ضرورت ہوتی ہے' جن کی مدد سے ان اشکال کو واضح کیا جاسکتا ہے۔

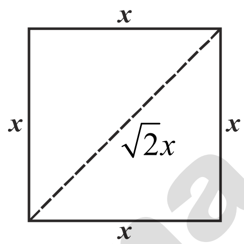
آیئے مربع پر غور کریں: دیئے گئے دو مربعوں کی جسامت مساوی ہے یا نہیں واضح کرنے کے لیے کم از کم کن معلومات کی ضرورت ہوتی ہے؟

رحیم نے کہا ''مجھے دیئے گئے مربعوں کے لیے صرف ایک ضلع کی پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے''۔ اگر دیئے گئے مربعوں کے اضلاع کے طول مساوی ہوں تب وہ یکساں جسامت رکھتے ہیں۔

Siri said "that is right but even if the diagonals of the two squares are equal then we can say that the given squares are identical and are same in size".

Do you think both of them are right?

Recall the properties of a square. You can't make two different squares with sides having same measures. Can you? And the diagonals of two squares can only be equal when their sides are equal. See the given figure:

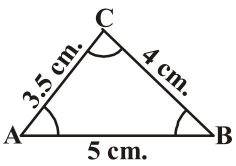


The figures that are same in shape and size are called congruent figures ('Congruent' means equal in all aspects). Hence squares that have sides with same measure are congruent and also with equal diagonals are congruent.

Note : In general, sides decide sizes and angles decide shapes.

We know if two squares are congruent and we trace one out of them on a paper and place it on other one, it will cover the other exactly.

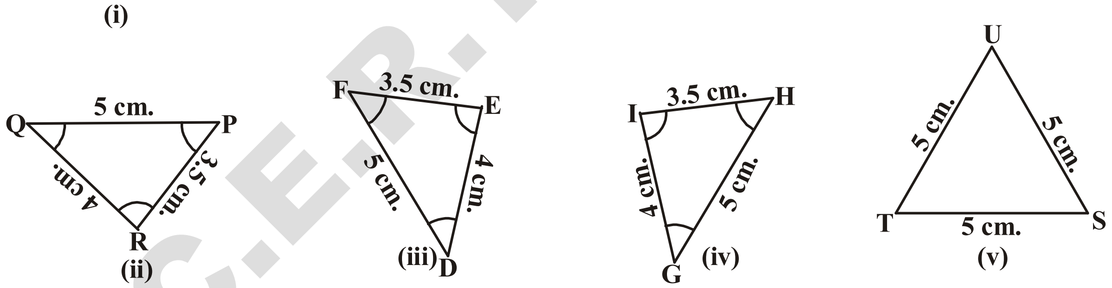
Then we can say that sides, angles, diagonals of one square are respectively congruent to the sides, angles and diagonals of the other square. Let us now consider the congruence of two triangles.



(i)

We know that if two traingles are congruent then the sides and angles of one triangle are congruent to the corresponding sides and angles of the other triangle.

Which of the triangles given below are congruent to triangle ABC in fig.(i).

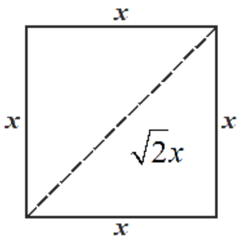


If we trace these triangles from fig.(ii) to (v) and try to cover ΔABC. We would observe that triangles in fig.(ii), (iii) and (iv) are congruent to ΔABC while ΔTSU in fig.(v) is not congruent to ΔABC.

If ΔPQR is congruent to ΔABC, we write it as $\Delta PQR \cong \Delta ABC$.

Notice that when $\Delta PQR \cong \Delta ABC$, then sides of ΔPQR covers the corresponding sides of ΔABC equally and so do the angles.

That is, PQ coincides AB, QR coincides BC and RP coincides CA; $\angle P$ coincides $\angle A$, $\angle Q$ coincides $\angle B$ and $\angle R$ coincides $\angle C$. Also, there is a one-one correspondence between the vertices. That is, P corresponds to A, Q to B, R to C.



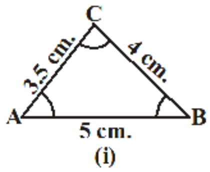
سروری نے کہا'' ہاں بالکل صحیح ہے' اگر دیئے گئے دومربعوں کے وتر بھی آپس میں مساوی ہوں تو تب دیئے گئے دومربعوں کی جسامت مساوی ہوتی ہے اور وہ مماثل ہوں گے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ دونوں بیان صحیح ہیں؟

مربع کی خصوصیات کا اعادہ کریں' آپ ایک ہی ضلع کی پیمائش سے دومختلف مربعے نہیں بنا سکتے' کیا آپ بنا سکتے ہیں؟

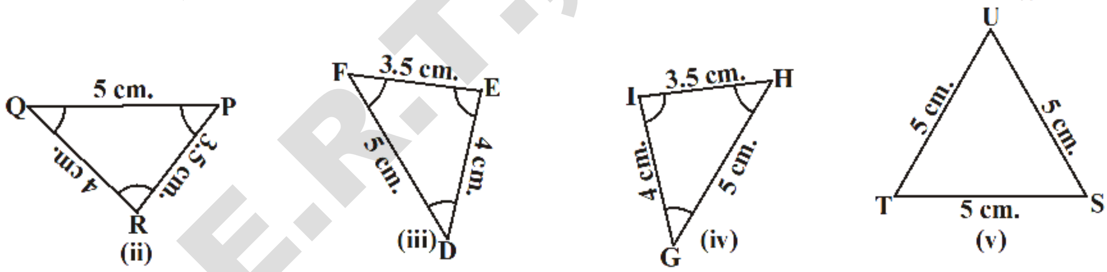
دومربعوں کے وتر آپس میں اس وقت مساوی ہوتے ہیں تب ان کے اضلاع بھی مساوی ہوں گے۔ دیئے گئے مربع پر غور کیجیے۔ ایسی اشکال جو یکساں ہوں اور جن کی جسامتیں بھی مساوی ہوں تو انھیں متماثل اشکال کہتے ہیں۔(متماثل یعنی تمام ہر پہلو سے مساوی ہوں) اس طرح مربعے جن کے ضلع مساوی ہوں متماثل کہلاتے ہیں۔ اور اس طرح اگر ان کے وتر مساوی ہوں تب بھی دونوں متماثل ہوتے ہیں۔

نوٹ: عام طور پر ضلعے سائز کو ظاہر کرتے ہیں اور زاویئے ان کی شکل کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر ایک مربع کو دوسرے مربع پر رکھیں تو وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوجاتے ہیں۔ ایک مربع دوسرے مربع کو ڈھانک لیتا ہے۔ تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مربع کے ضلعے' زاویئے اور وتر ترتیب وار دوسرے مربع کے ضلعے' زاویئے اور وتر کے مساوی ہوتے ہیں یا مماثل ہوتے ہیں۔



اب ہم مثلثات کی مماثلت پر غور کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر دومثلثات متماثل ہوں تب ایک مثلث کے اضلاع اور زاویئے دوسرے مثلث کے متناظر اضلاع وزاویوں کے مساوی ہوں گے۔

ذیل میں دیئے گئے مثلثات میں کونسے مثلثات مثلث ABC سے مشابہ ہیں۔



اگر ہم مثلث ABC کا تقابل دیگر مثلثات سے کرتے ہیں' تب ہم مشاہدہ کرتے ہیں' شکل (ii)' (iii) اور (iv) مثلث ABC کے متماثل ہے جب کہ Δ TSU شکل (v) مثلث ABC کے متماثل نہیں ہے۔

اگر Δ PQR متماثل ہے Δ ABC کے' ہم اس طرح لکھتے ہیں

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

ہم غور کرتے ہیں کہ جب $\Delta ABC \cong \Delta PQR$' تب Δ PQR کے اضلاع Δ ABC کے متناظر اضلاع کو پوری طرح ڈھانک لیتے ہیں' اور اسی طرح زاویئے بھی ایکدوسرے کو ڈھانک لیتے ہیں۔

یعنی ضلع PQ' AB پر منطبق ہوتا ہے۔ QR' خط BC کو پر RP ضلع CA پر منطبق ہوتا ہے۔ اس طرح $\angle P$ ' $\angle A$ کو اور $\angle Q$ ' $\angle B$ کو اور $\angle R$ ' $\angle C$ پر منطبق ہوتے ہیں جہاں پر ان کے راس کے درمیان ایک تا ایک مطابقت پائی جاتی ہے۔ اس طرح کہ A' P سے B' Q سے اور C' R سے مطابقت رکھتا ہے۔

We write as symbolically. $P \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $R \leftrightarrow C$ $\quad \Delta PQR \cong \Delta ABC$

Note that under order of correspondence, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$; but it will not be correct to write $\Delta QRP \cong \Delta ABC$, $Q \leftrightarrow A$; $R \leftrightarrow B$; $P \leftrightarrow C$ and as we get $QR = AB$, $RP = BC$ and $QP = AC$ which is incorrect for the given figures?

Similarly, for fig. (iii),

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$ and $EF \leftrightarrow CA$

and $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$ and $E \leftrightarrow C$

So, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ but writing $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ is not correct.

In the same way try to write the congruency for ΔABC with fig.(iv)

So, it is necessary to write the correspondence of vertices in correct order, while writing of congruence of triangles.

Note that **corresponding parts of congruent triangles** are **equal** and we write in short as 'CPCT' for *corresponding parts of congruent triangles.*

Do This

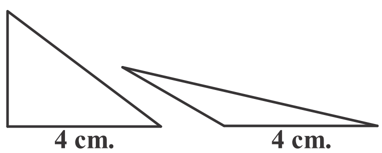
1. There are some statements given below. Write whether they are true or false :
   - i. Two circles are always congruent. ( )
   - ii. Two line segments of same length are always congruent. ( )
   - iii. Two right angle triangles are sometimes congruent. ( )
   - iv. Two equilateral triangles with their sides equal are always congruent. ( )
2. Howmany number of minimum measurements do you require to check if the given figures are congruent or not?
   - i. Two rectangles
   - ii. Two rhombuses

7.2 Criteria for Congruence of Triangles

You have learnt the criteria for congruency of triangles in your earlier class. Let us recall.

Is it necessary to know all the three sides and three angles of a triangle to construct a unique triangle? Can we construct different triangles with the same given measurements?

Draw two triangles with one of its sides 4 cm. Can you make two different triangles with one side of 4 cm? Discuss with your friends. Do you all get congruent triangles? You can draw different types of triangles if one side is given say 4 cm.



اس کو علامتی طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ $\quad \Delta PQR \cong \Delta ABC$

مطابقت کی ترتیب کے لحاظ سے $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ لکھا جائے لیکن $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ لکھتا ہے غلط ہوگا جس سے ہم $P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ کو $QR = AB$، $RP = BC$ اور $QP = AC$ حاصل ہوں گے جو کہ شکل کے مطابق صحیح نہیں ہے۔

اسی طرح شکل (iii) کے لیے

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ اور $EF \leftrightarrow CA$

اور $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ اور $E \leftrightarrow C$

لہٰذا $\Delta FDE \cong \Delta ABC$، لیکن $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ لکھنا صحیح نہیں ہوگا۔

اب آپ شکل (iv) اور ΔABC کے درمیان مطابقت کو ظاہر کیجیے۔

مثلثات کی متماثلت کو ظاہر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ ان کے راس کے درمیان مطابقت کو درست ترتیب ظاہر کریں۔

ذہن نشین کرلیں کہ متماثل مثلثات کے متناظر حصے مساوی ہوتے ہیں۔

اس کو ہم مختصراً CPCT (Corresponding parts of congruent triangles) لکھتے ہیں۔

یہ کیجیے

1. مندرجہ ذیل میں چند بیانات دیے گئے ہیں بتائیے کہ وہ صادق ہیں یا کاذب

   (i) دو دائیرے ہمیشہ متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

   (ii) دو خطی قطعے جن کے طول ایک ہی ہوں آپس میں ہمیشہ متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

   (iii) دو قائم الزاویہ مثلثات بعض اوقات متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

   (iv) دو مساوی الاضلاع مثلثات جن کے ضلع ایک دوسرے کے مساوی ہوں ہمیشہ متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

2. مندرجہ ذیل اشکال کے متماثل ہونے کی جانچ کے لیے درکار کم از کم کتنی پیمائشات ضروری ہیں۔

   (i) دو مثلثات   (ii) دو معین

2.2 مثلثات کی متماثلت کی جانچ کے اصول

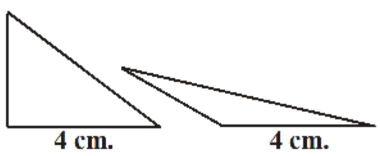
آپ پچھلی جماعتوں میں مثلثات کی متماثلت کی جانچ کے اصول سیکھ چکے ہیں۔ اس کی یاد دہانی کیجیے۔

ایک مخصوص مثلث کو بنانے کے لیے کیا اس کے تمام اضلاع اور زاویے جاننا ضروری ہے؟ دی گئی مساوی پیمائشات سے کیا ہم مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں؟

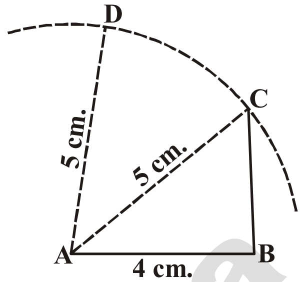
دو مثلثات بنائیے جن کا ایک ضلع 4 سمر ہے۔ کیا آپ دو مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں جس کا ایک ضلع 4 سمر ہے؟ اپنے دوست سے تبادلہ خیال کیجیے۔

کیا آپ کو متماثل مثلثات حاصل ہوں گے؟

آپ ایک ضلع سے جس کا طول 4 سمر ہو مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں۔

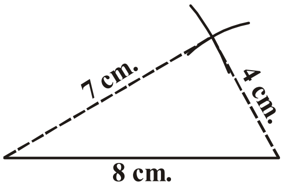


Now take two sides as 4 cm. and 5 cm. and draw as many triangles as you can. Do you get congruent triangles?



We can make different triangles even with these two given measurements.

Now draw triangles with sides 4 cm., 7 cm. and 8 cm.

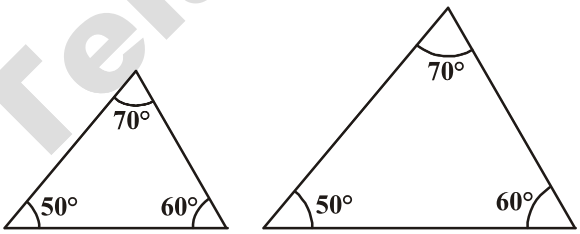


Can you draw two different triangles? You find that these three with measurement sides, we will have a unique triangle. If at all you draw the triangles with these measures they will be congruent to this unique triangle.

Now take three angles of your choice, of course the sum of the angles must be 180°. Draw two triangles for your chosen angle measurement.

Mahima finds that she can make different triangles by using three angle measurement.

$\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$



So it seems that knowing the 3 angles is not enough to make a specific triangle.

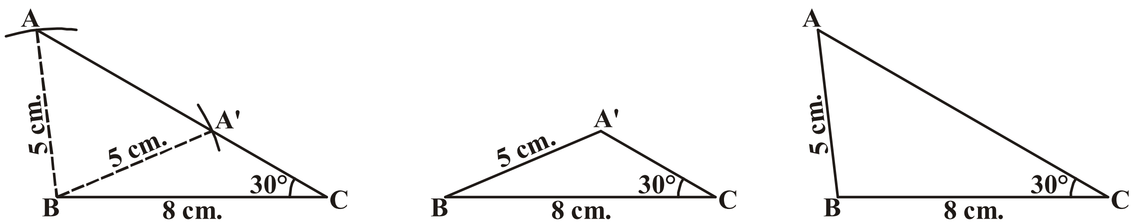
Sharif thought that if two angles are given then he could easily find the third one by using the angle sum property of a triangle. So measures of two angles is enough to draw a triangle but not uniquely. Hence knowing 3 or 2 angles is not adequate. We need at least three specific and independent measurements (elements) to make a unique triangle.

Now try to draw two distinct triangles with each sets of these three measurements:

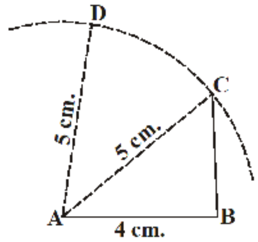
i. ΔABC where AB = 5 cm., BC = 8 cm., $\angle C = 30°$

ii. ΔABC where AB = 5 cm., BC = 8 cm., $\angle B = 30°$

(i) Are you able to draw a unique triangle with the given measurements, draw and check with your friends.

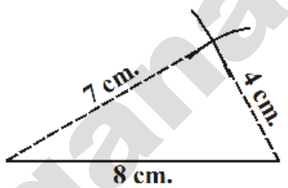


اب 4 سمر اور 5 سمر طول والے دو ضلع لیجیے اور ان سے آپ جتنے چاہیں مثلثات بنایئے۔کیا آپ کو متماثل مثلثات حاصل ہوں گے؟



ہم دی گئی ان دو پیمائشات سے مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں۔

اب آپ اضلاع 4 سمر، 7 سمر اور 8 سمر کے مثلثات بنایئے۔

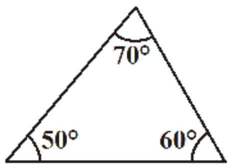


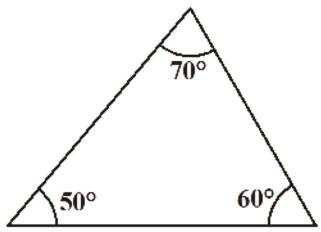
کیا آپ ان پیمائشات سے دو مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں؟

آپ دیکھیں گے کہ ان تین پیمائشات کی مدد سے ہم صرف ایک ہی مثلث بنا سکتے ہیں۔

آخر کار ان ابعاد کی مدد سے آپ جتنے بھی ممکنہ مثلثات تیار کریں گے یہ مثلثات متماثل ہوں گے۔

اب آپ اپنی مرضی سے کوئی تین زاویے منتخب کیجیے، لیکن ان کا مجموعہ 180^0 ہونا ضروری ہے۔آپ کے منتخب زاویوں کی پیمائش سے دو مثلثات بنایئے۔





ثانیہ: تین مختلف زاویوں کی پیمائش سے مختلف مثلثات بناتی ہے۔

$\angle A = 50^\circ, \quad \angle B = 70^\circ, \quad \angle C = 60^\circ$

اس سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ کوئی مخصوص مثلث بنانے کے لیے تین زاویے کافی نہیں ہوتے۔

شریف سوچتا ہے کہ اگر دو زاویے دیئے گئے ہوں تب وہ آسانی سے تیسرا زاویہ ”مثلث کے تینوں زاویوں کے مجموعہ کے اصول سے معلوم کر سکتا ہے“ کسی بھی مثلث کو بنانے کے لیے دو زاویوں کی پیمائش کافی ہوتی ہے، لیکن کوئی منفرد مثلث بنانے کے لیے نہیں۔

اسی طرح دیئے گئے کوئی تین یا دو زاویے کافی نہیں ہوتے جس سے کہ کوئی منفرد مثلث بنایا جا سکے۔

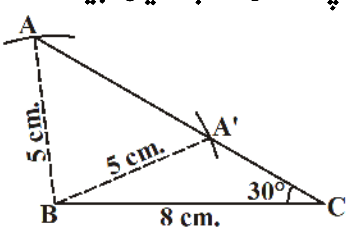
ایک مثلث بنانے کے لیے ہم کو کم از کم تین آزادانہ پیمائشات کی ضرورت ہوتی ہے۔

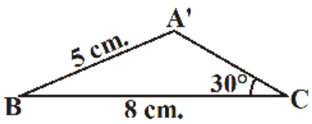
مندرجہ ذیل میں دی گئی تین پیمائشات کو لیکر کوئی دو مختلف مثلثات بنانے کی کوشش کیجیے۔

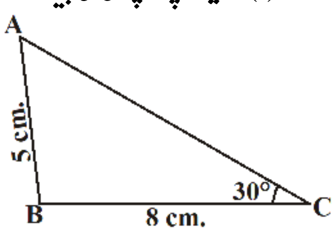
(i) ΔABC جہاں $AB = 5cm$، $BC = 8cm$ اور $\angle C = 30^\circ$

(ii) ΔABC جہاں $AB = 5cm$، $BC = 8cm$ اور $\angle B = 30^\circ$

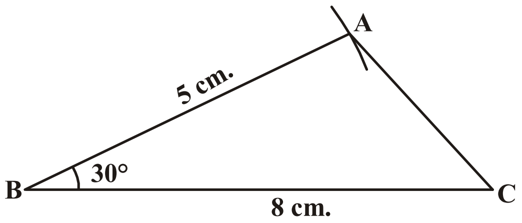
(i) کیا آپ اوپر دی گئی پیمائشات سے مثلث بنا سکتے ہیں؟ اور اس کی جانچ کر سکتے ہیں؟ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔







Here we can draw two different triangles ΔABC and $\Delta A'BC$ with given measurements. Now draw two triangles with given measurements (ii). What do you observe? They are congruent triangles. Aren't they?



In the other words you can draw a unique triangle with the measurements given in case(ii).

Have you noticed the order of measures given in case (i) & case (ii) ? In case (i) two sides and one angle are given which is not an included angle but in case (ii) included angle is given along with two sides. Thus given two sides and one angle i.e. three independent measures is not the only criteria to make a unique triangle. But the order of given measurements to construct a triangle also plays a vital role in constructing a unique triangle.

7.3 Congruence of Triangles

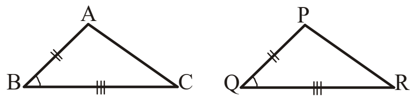
The above has an implication for checking the congruency of triangles. If we have two triangles with one side equal or two triangles with all 3 angles equal, we can not conclude that triangles are congruent as there are more than one triangle possible with these specifications. Even when we have two sides and an angle equal we cannot say that the triangles are congruent unless the angle is between the given sides. We can say that the SAS (side angle side) congruency rule holds but not SSA or ASS.

We take this as the first criterion for congruency of triangles and prove the other criteria through this.

Axiom (SAS congruence rule): *Two triangles are congruent if two sides and the included angle of one triangle are equal to the two sides and the included angle of the other triangle.*

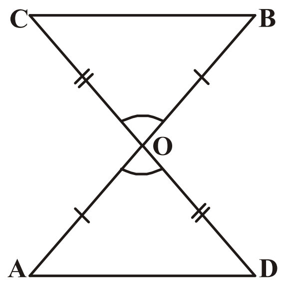
For example. In ΔABC and ΔPQR

AB=PQ, BC=QR and $\angle ABC = \angle PQR$, then $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



Example-1. In the given figure AB and CD are intersecting at 'O', OA = OB and OD = OC. Show that

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ and (ii) AD || BC.



Solution : (i) In ΔAOD and ΔBOC,

OA = OB (given)

OD = OC (given)

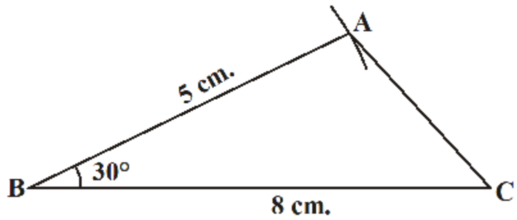
Also, since $\angle AOD$ and $\angle BOC$ form a pair of vertically opposite angles, we have $\angle AOD = \angle BOC$.

So, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (by the SAS congruence rule)

(ii) In congruent triangles AOD and BOC, the other corresponding parts are also equal.

So, $\angle OAD = \angle OBC$ and these form a pair of alternate angles for line segments AD and BC. (and transversal AB)

Therefore AD || BC



یہاں ہم دی گئیں پیمائشات کی مدد سے دو مختلف مثلثات ΔABC اور $\Delta A'BC$ بنا سکتے ہیں۔

اب آپ دو مثلثات دی گئیں پیمائشات کی مدد سے بنایئے۔ (ii) آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

وہ متماثل مثلثات ہیں یا نہیں؟

مرحلہ (ii) میں دی گئیں پیمائشات کی مدد سے آپ ایک مثلث بنا سکتے ہیں۔

کیا آپ نے اس بات پر غور کیا ہے کہ مرحلہ (i) اور مرحلہ (ii) میں پیمائشات کی ترتیب کس طرح ہے؟

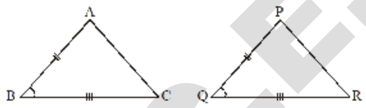
مرحلہ (i) میں دو ضلعے اور ایک زاویہ جو ان دونوں ضلعوں کے درمیان واقع نہیں ہے' دیا گیا ہے۔ لیکن مرحلہ (ii) میں دو ضلعے اور ان دونوں کی پیمائش کے درمیان واقع زاویے کی پیمائش دی گئی ہے۔ اسی طرح دو ضلعے اور ایک زاویہ یعنی تین آزادانہ پیمائشات ایک منفرد مثلث بنانے کے لیے اصول نہیں ہوسکتا۔ اس کے علاوہ ان پیمائشات کی ترتیب بھی منفرد مثلث بنانے کے لیے بہت ہی اہم کردار ادا کرتی ہے۔

7.3 مثلثات کی متماثلت

مندرجہ بالا تحریر مثلثات کی متماثلت کی دلالت کرتی ہے' اگر ہم دو مثلثات جن میں ایک ضلع مساوی یا دو مثلثات جن کے تین زاویے مساوی لیتے ہیں تب ہم ان مثلثات کی متماثلت کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں' جب کہ ان پیمائشات سے ایک سے زیادہ دو مختلف مثلثات بنائے جا سکتے ہیں' حتیٰ کہ اگر دو مثلثات کے دو ضلع اور ایک زاویہ مساوی ہونے پر بھی ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ یہ دو مثلثات مماثل ہیں جب تک کہ دیا گیا زاویہ ان دونوں ضلعوں کے درمیان واقع نہ ہو۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ (SAS) (ضلع۔ زاویہ۔ ضلع) متماثلت کا اصول ہے لیکن SSA اور ASS سے ایسا کوئی اُصول نہیں بنتا۔

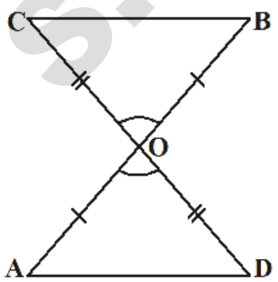
ہم مندرجہ بالا اصول سے مثلثات کی متماثلت کے لیے ایک اصول متصور کرتے ہوئے اس کے ذریعہ کئی دوسرے اصول ثابت کر سکتے ہیں۔

موضوعہ (SAS) متماثلت کا اصول: دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں' اگر اور صرف اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر ضلعوں اور درمیانی زاویے کے مساوی ہوں۔ مثلاً ABC اور PQR میں



$AB = PQ,\ BC = QR$ and $\angle ABC = \angle PQR$, then $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

مثال (1) : دی گئی شکل میں AB اور CD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں $OA = OB$ اور $OD = OC$ بتایئے کہ (i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (ii) $AD \parallel BC$



حل : (i) مثلثات ΔAOD اور ΔBOC میں

$OA = OB$ (دیا گیا)

$OD = OC$ (دیا گیا)

اس کے علاوہ $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ مقابل کے راس زاویوں کے جوڑ ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\angle AOD = \angle BOC$

اس طرح $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS متماثلت کی رو سے)

(ii) متماثل مثلثات AOD اور BOC میں اس کے متناظر حصے بھی مساوی ہوتے ہیں۔

اور یہ خطی قطعے AD اور BC کے متبادل زاویوں کے جوڑ ہیں (جبکہ AB اور CD قاطع خط ہوں)

یعنی $AD \parallel BC$

Example-2. AB is a line segment and line l is its perpendicular bisector. If a point P lies on l, show that P is equidistant from A and B.

Solution : Line $l \perp$ AB and it passes through C which is the mid-point of AB

We have to show that PA = PB.

Consider ΔPCA and ΔPCB.

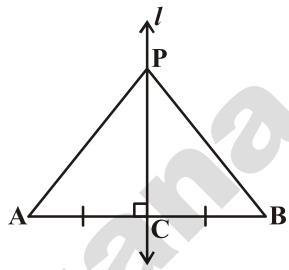
We have AC = BC (C is the mid-point of AB)

$\angle$PCA = $\angle$PCB = 90° (Given)

PC = PC (Common side)

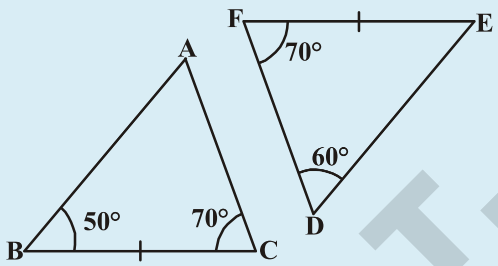
So, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS rule)

and so, PA = PB, (corresponding sides of congruent triangles.)

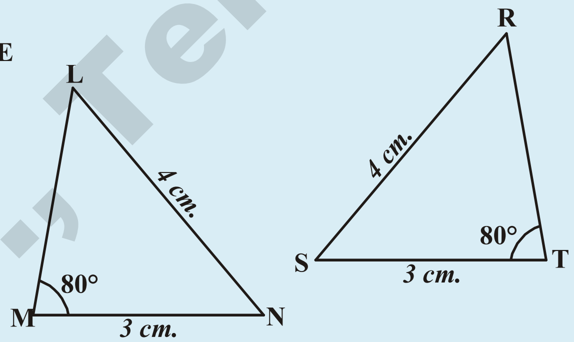


Do These

1. State whether the following triangles are congruent or not? Give reasons for your answer.

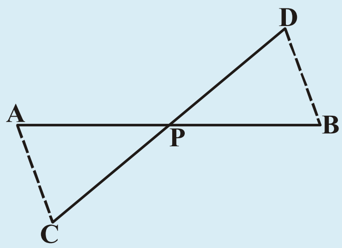


(i)



(ii)

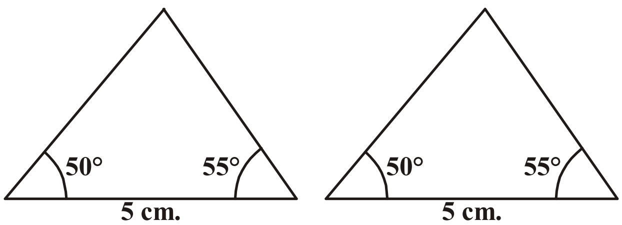
2. In the given figure, the point P bisects AB and DC. Prove that $\Delta APC \cong \Delta BPD$



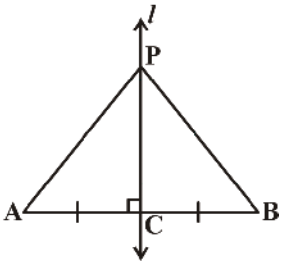
7.3.1 Other Congruence Rules

Try to construct two triangles in which two of the angles are 50° and 55° and the side on which both these angles lie being 5cm.

Cut out these triangles and place one on the other. What do you observe? You will find that both the triangles are congruent. This result is the angle-side-angle criterion for congruence and is written as ASA criterion you have seen



مثال (2) : AB ایک خطی قطعہ ہے،اور خط l اس کا عمودی ناصف ہے۔اگر ایک نقطہ P خط l پر واقع ہو تو بتائیے کہ P، نقاط A اور B سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔



حل : خط $l \perp AB$ اور C سے گذرتا ہے جو AB کا وسطی نقطہ ہے۔

ہم کو ثابت کرنا ہے کہ $PA = PB$

ΔPCA اور ΔPCB پر غور کیجیے۔

ہم جانتے ہیں کہ $AC = BC$ ($\because$ نقطہ C، AB کا وسطی نقطہ ہے)

دیا گیا ہے کہ $\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$

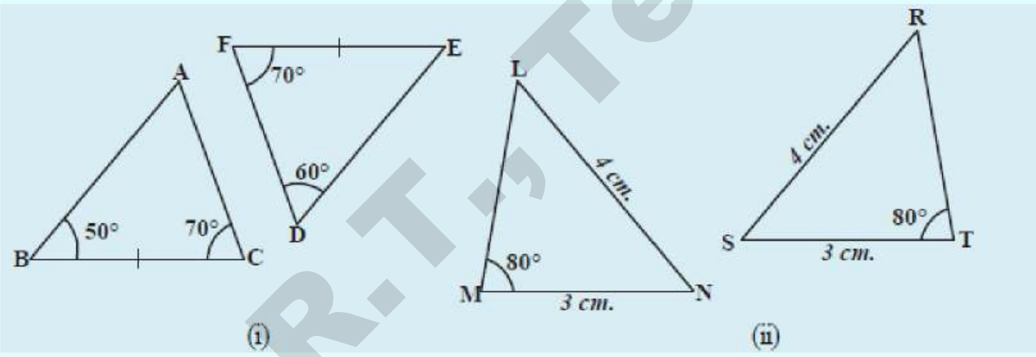
$PC = PC$ (مشترک ضلع)

اس طرح $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS اصول)

اور اس طرح $PA = PB$ چونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اضلاع ہیں۔

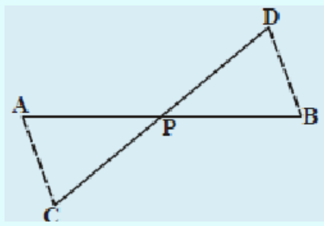
یہ کیجیے

.1 بتائیے کہ مندرجہ ذیل میں دیئے گئے مثلثات متماثل ہیں یا نہیں؟



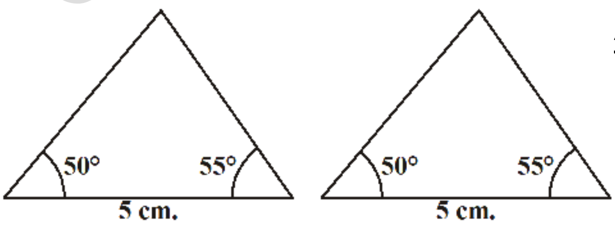
.2 دی گئی شکل میں نقطہ P، AB اور DC کا ناصف ہے۔ثابت کیجیے کہ

$\Delta APC \cong \Delta BPD$



7.3.1 متماثلت کے دیگر اصول

ایسے دو مثلثات بنانے کی کوشش کیجیے جن کے دو زاویے 50° اور 55° ہیں اور ان کے درمیان واقع خط کا طول 5 سمر ہو۔



ان مثلثات کو کاٹ کر ایک دوسرے پر رکھیئے۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ جانیں گے کہ یہ مثلثات ایک دوسرے کے متماثل ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے کہ زاویہ۔ضلع۔زاویہ' بھی متماثلت کا ایک اصول ہے

this in earlier classes. Now let us state and prove the result. Since this result can be proved, it is called a theorem and to prove it, we use the SAS axiom for congruence.

Theorem 7.1 (ASA congruence rule) : Two triangles are congruent, if two angles and the included side of one triangle are equal to two angles and the included side of the other triangle.

Given: In ΔABC and ΔDEF

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ and $BC = EF$

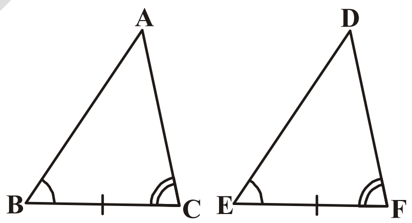
Required To Prove (RTP): $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Proof: There will be three posibilities. The possiblities between AB and DE are either $AB > DE$ or $AB < DE$ or $AB = DE$.

We will consider all these cases and see what does it mean for ΔABC and ΔDEF?

Case (i): Let $AB = DE$, Now what do we observe?

Consider ΔABC and ΔDEF



$AB = DE$ (Assumed)

$\angle B = \angle E$ (Given)

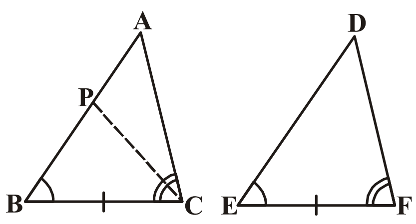
$BC = EF$ (Given)

So, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (By SAS congruency axiom)

Case (ii): Let the second case be $AB > DE$.

So, we can take a point P on AB such that $PB = DE$.

Now consider ΔPBC and ΔDEF



$PB = DE$ (by construction)

$\angle B = \angle E$ (given)

$BC = EF$ (given)

So, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (by SAS congruency axiom)

Since the triangles are congruent their corresponding parts are equal.

So, $\angle PCB = \angle DFE$

But, $\angle ACB = \angle DFE$ (given)

جسے آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم اس اصول کو بیان کریں گے اور اس کا ثبوت پیش کریں گے چونکہ اس کو ثابت کرنا ہے لہٰذا اسے مسئلہ کہا جائے گا۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم SAS متماثلت کے اصول کو استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.1 (ASA) زاویہ۔ضلع۔زاویہ' کی متماثلت کا اصول : دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں' اگر اور صرف اگر ایک مثلث کے کوئی دو زاویئے اور ان کا مشترکہ ضلع دوسرے مثلث کے متناظر زاویوں اور ان کے مشترک ضلع کے مساوی ہو۔

دیا گیا ہے کہ: ΔABC اور ΔDEF میں

$\angle B = \angle E$ ، $\angle C = \angle F$ اور $BC = EF$

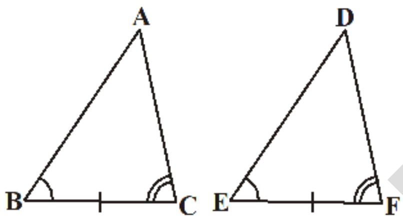
ثابت کرنا ہے کہ (R.T.P) : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ثبوت: تین ممکنہ وجوہات ہوسکتی ہیں۔

$\overline{AB}$ اور $\overline{DE}$ کے درمیان ممکنہ وجوہات ہیں $AB > DE$ یا $\overline{DE} > \overline{AB}$ یا $\overline{DE} = \overline{AB}$

ΔABC اور ΔDEF کی متماثلت کے لیے مندرجہ بالا وجوہات پر غور کریں گے۔

صورت (i) : فرض کیجیے کہ $\overline{AB} = \overline{DE}$ ہم کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟



ΔABC اور ΔDEF پر غور کرنے پر

$\overline{AB} = \overline{DE}$ (مفروضہ)

$\angle B = \angle E$ (دیا گیا)

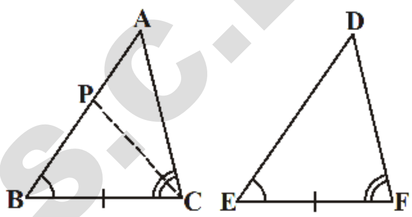
$\overline{BC} = \overline{EF}$ (دیا گیا)

اس طرح $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثلت کے موضوعہ کے تحت)

صورت (ii) : دوسری ممکنہ صورت $AB > DE$ میں

ہم نقطہ P کو خط AB پر اس طرح لیتے ہیں کہ $PB = DE$

اب ΔPBC اور ΔDEF پر غور کیجیے۔



$PB = DE$ (خط کھینچتے ہوئے)

$\angle B = \angle E$ (دیا گیا)

$BC = EF$ (دیا گیا)

اس طرح $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثلت موضوعہ کے تحت)

چونکہ مثلثات متماثل ہیں اس لیے ان کے متناظر حصّے مساوی ہوں گے۔

اس طرح $\angle PCB = \angle DFE$

لیکن $\angle ACB = \angle DFE$ (دیا گیا ہے)

So $\angle ACB = \angle PCB$ (from the above)

Is this possible?

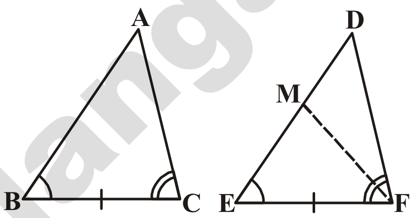
This is possible only if P coincides with A

(or) BA = ED

So, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (By SAS congruency axiom)

(**Note :** We have shown above that if $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$ and BC = EF then AB = DE and the two triangles are congruent by SAS rule).

Case (iii): Let the third case be $AB < DE$



We can choose a point M on DE such that ME = AB and repeating the arguments as given in case (ii), we can conclude that AB = DE and so, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Look at the figure and try to prove it yourself.

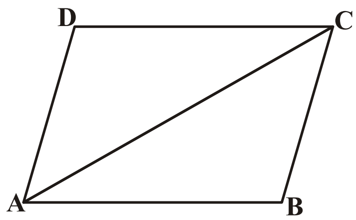
Suppose, now in two triangles two pairs of angles and one pair of corresponding sides are equal but the side is not included between the corresponding equal pairs of angles. Are the triangles still congruent? You will observe that they are congruent. Can you reason out why?

You know that the sum of the three angles of a triangle is 180°. So if two pairs of angles are equal, the third pair is also equal (180° – sum of equal angles).

So, two *triangles are congruent if any two pairs of angles and one pair of corresponding sides are equal.* We may call it as the **AAS Congruence Rule.** Let us examine some more examples.

Example-3. In the given figure, AB|| DC and AD|| BC show that $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Solution : Consider ΔABC and ΔCDA



$\angle BAC = \angle DCA$ (alternate interior angles)

AC = CA (common side)

$\angle BCA = \angle DAC$ (alternate interior angles)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (by ASA congruency)

اس طرح $\angle ACB = \angle PCB$ (اوپر دیا گیا ہے)

کیا یہ ممکن ہے؟

یہ تب ہی ممکن ہوسکتا ہے جب نقطہ P نقطہ A پر منطبق ہو۔

یا $\overline{BA} = \overline{ED}$

اس طرح $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثلت کے موضوعہ کے تحت)

نوٹ: اوپر وضاحت ہو چکی ہے کہ اگر $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ اور $\overline{BC} = \overline{EF}$ تب $\overline{AB} = \overline{DE}$ اور SAS متماثلت موضوعہ کے تحت دو مثلثات متماثل ہیں۔

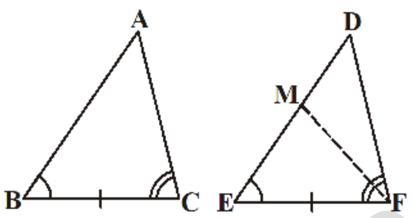
صورت (iii) : تیسری ممکنہ صورت $AB < DE$

ہم ایک نقطہ M کو خط DE پر اس طرح لیتے ہیں کہ $ME = AB$

اور مرحلہ (ii) میں دی گئی وضاحت کو دہراتے ہوئے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $AB = DE$ اور اس طرح $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

شکل کو دیکھتے ہوئے آپ خود سے ثابت کرنے کی کوشش کیجیے۔

فرض کیجیے کہ دو مثلثات میں دو زاویوں کے جوڑ اور ایک متناظر ضلعوں کے جوڑ مساوی ہیں لیکن ضلع کو متناظر مساوی زاویوں کے جوڑ کے درمیان نہیں لیا گیا ہے کیا یہ مثلثات تب بھی متماثل ہوتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کریں گے کہ یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں ایسا کیوں ہے؟



آپ یہ جانتے ہیں مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

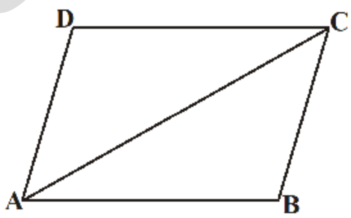
اس طرح اگر زاویوں کے دو جوڑ مساوی ہوں تو تیسرا جوڑ بھی مساوی ہوگا۔ (مساوی زاویوں کا مجموعہ 180^0)

لہٰذا اگر زاویوں کے کوئی دو جوڑ اور متناظر ضلعوں کا ایک جوڑ مساوی ہو تو دو مثلثات متماثل ہوں گے اور ہم اس کو (AAS) متماثلت کا اصول کہتے ہیں۔

آیئے اب ہم مزید مثالوں پر غور کریں۔

مثال (3): دی گئی شکل میں $AB \parallel DC$ اور $AD \parallel BC$ بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

حل: ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔



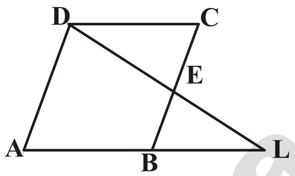
$\angle BAC = \angle DCA$ (متبادل اندرونی زاویے)

$AC = CA$ (مشترک ضلع)

$\angle BCA = \angle DAC$ (متبادل اندرونی زاویے)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA متماثل موضوعہ کے تحت)

Example-4. In the given figure, AL || DC, E is mid point of BC. Show that $\Delta EBL \cong \Delta ECD$



Solution : Consider ΔEBL and ΔECD

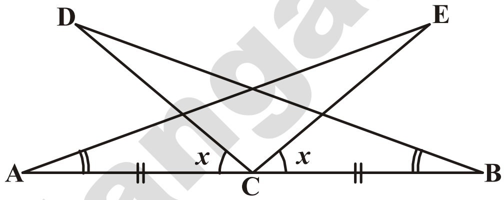
$\angle BEL = \angle CED$ (vertically opposite angles)

BE = CE (since E is mid point of BC)

$\angle EBL = \angle ECD$ (alternate interior angles)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (by ASA congruency)

Example-5. Use the information given in the adjoining figure, prove the following :



(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

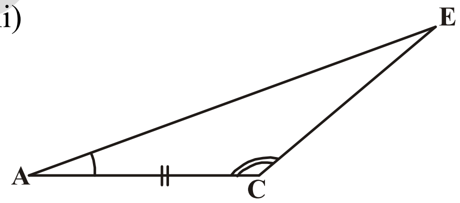
(ii) DC = EC.

Solution : Let $\angle ACD = \angle BCE = x$

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

From (i) and (ii), we get : $\angle ACE = \angle BCD$

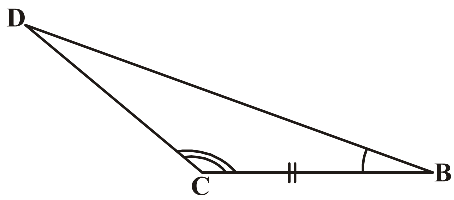


Now in ΔDBC and ΔEAC,

$\angle ACE = \angle BCD$ (proved above)

BC = AC [Given]

$\angle CBD = \angle CAE$ [Given]

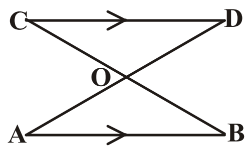


$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [By A.S.A]

since $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

DC = EC (by CPCT)

Example-6: Line-segment AB line-segment CD are parallel. O is the mid-point of AD. Show that (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O is also the mid-point of BC.



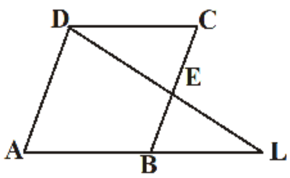
Solution : (i) Consider ΔAOB and ΔDOC.

$\angle ABO = \angle DCO$ (Alternate angles as AB || CD and BC is the transversal)

$\angle AOB = \angle DOC$ (Vertically opposite angles)

OA = OD (Given)

مثال (4) : دی گئی شکل میں $AL \parallel DC$ جہاں پر E ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔ بتلائیے کہ $\Delta EBL \cong \Delta ECD$



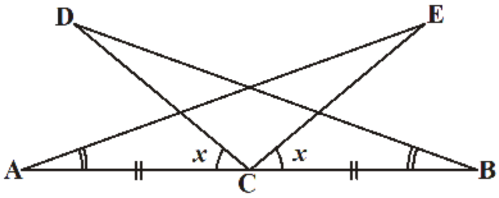
حل : ΔEBL اور ΔECD پر غور کیجیے۔

$\angle BEL = \angle CED$ (مقابل کے راسی زاویئے)

$BE = CE$ (چونکہ E ‘BC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle EBL = \angle ECD$ (اندرونی متبادل زاویئے)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (ASA متماثل موضوعہ کے تحت)



مثال (5) : متعلقہ شکل میں دی گئی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

$DE = EC$ (ii)

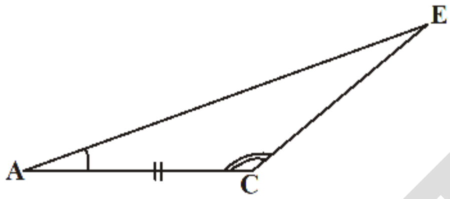
حل : فرض کیجیے $\angle ACD = \angle BCE = x$

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی مدد سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\angle ACE = \angle BCD$



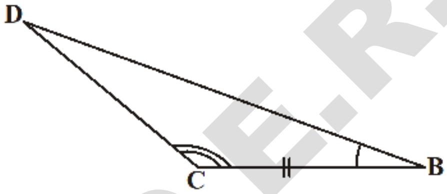
اب ΔDBC اور ΔEAC میں

$\angle ACE = \angle BCD$ (پہلے ہی ثابت کیا گیا ہے)

$BC = AC$ (دیا گیا ہے)

$\angle CBD = \angle EAC$ (دیا گیا ہے)

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ (ASA کی رو سے)

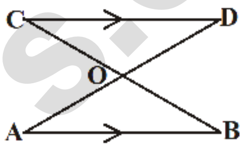


چونکہ $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

$DC = EC$ (CPCT کی رو سے)

مثال (6) : خطی قطعہ AB ‘ خطی قطعہ CD کے متوازی ہے۔

اور O خط AD کا وسطی نقطہ ہے۔



بتائیے کہ (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) نقطہ O خط BC کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

حل : (i) ΔAOB اور ΔDOC پر غور کیجیے۔

$\angle ABO = \angle DCO$ (متبادل زاویے کیوں کہ $AB \parallel CD$ اور جہاں BC قاطع خط ہے)

$\angle AOB = \angle DOC$ (متقابل راسی زاویئے)

$OA = OD$ (دیا گیا ہے)

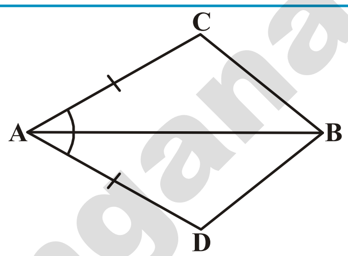
Therefore, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS rule)

(ii) $OB = OC$ (CPCT)

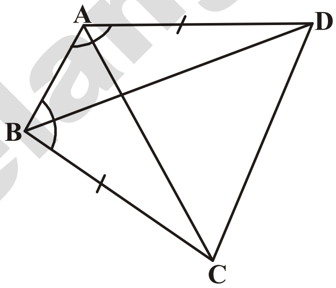
$\therefore$, O is the mid-point of BC.

EXERCISE - 7.1

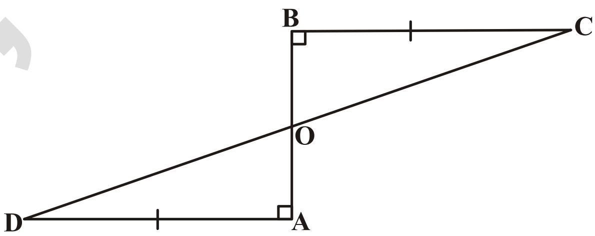
1. In quadrilateral ACBD, $AC = AD$ and AB bisects $\angle A$ Show that $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.
   What can you say about BC and BD?



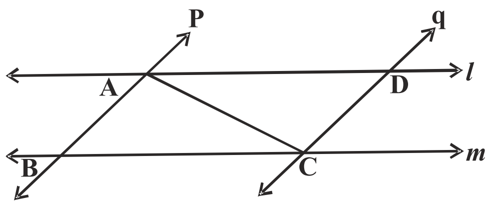
2. ABCD is a quadrilateral in which $AD = BC$ and $\angle DAB = \angle CBA$ Prove that
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
   (ii) $BD = AC$
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$



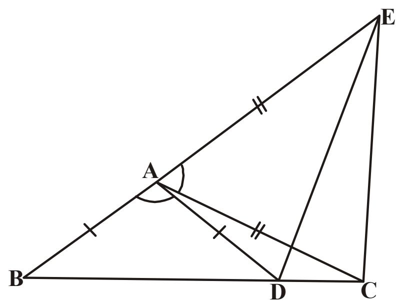
3. AD and BC are equal and perpendiculars to a line segment AB then show that CD bisects AB.



4. l and m are two parallel lines intersected by another pair of parallel lines p and q . Show that $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



5. In the adjacent figure, $AC = AE$, $AB = AD$ and $\angle BAD = \angle EAC$. Show that $BC = DE$.

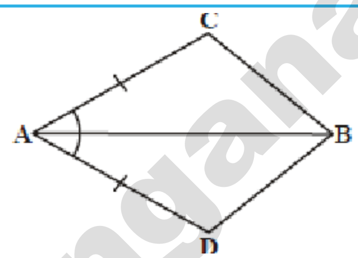


اس طرح $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS اصول کے تحت)

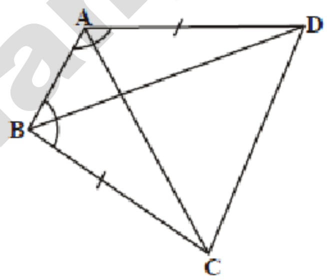
(ii) $OB = OC$ (CPCT کی رو سے)

اس طرح O خط BC کا وسطی نقطہ ہے

مشق 7.1



.1 چارضلعی ACBD میں $AC = AD$ اور خطی خطہ AB، $\angle A$ کا ناصف ہے۔تب بتایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ آپ خط BC اور BD کے بارے میں کیا کہیں گے؟

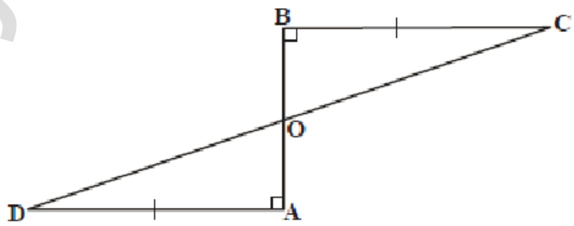


.2 ABCD ایک چارضلعی ہے جس میں $AD = BC$ اور $\angle DAB = \angle CBA$ ثابت کیجیے کہ

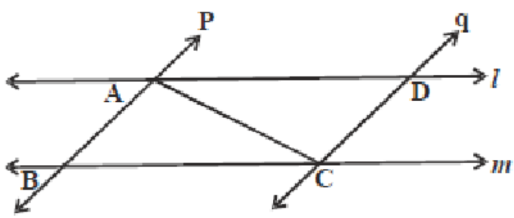
(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

(ii) $BD = AC$

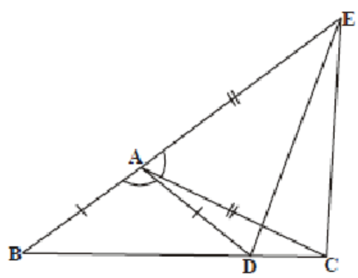
(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



.3 خطوط $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ مساوی ہیں اور یہ خطی قطعہ AB پر عمود وار ہے۔ بتایئے کہ CD خط AB کا ناصف ہے۔

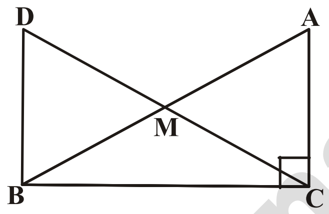


.4 l اور m دو متوازی خطوط ہیں اور یہ دوسرے متوازی خطوط کے جوڑ p اور q کو قطع کرتے ہیں۔ بتایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



.5 متصلہ شکل میں $AC = AE$، $AB = AD$ اور $BC = DE$ بتایئے کہ $\angle BAD = \angle EAC$

6. In right triangle ABC, right angle is at C, M is the mid-point of hypotenuse AB. C is joined to M and produced to a point D such that DM = CM. Point D is joined to point B (see figure). Show that :



(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

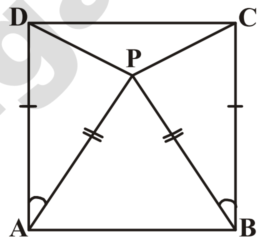
(ii) $\angle$ DBC is a right angle

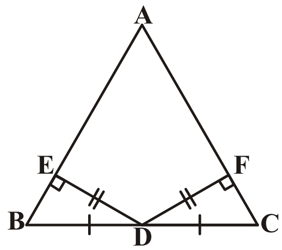
(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2}AB$

7. In the adjacent figure ABCD is a square and ΔAPB is an equilateral triangle. Prove that $\Delta APD \cong \Delta BPC$.

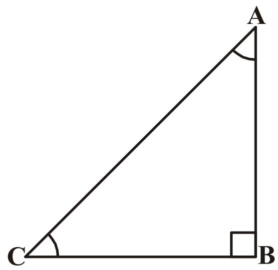
(**Hint :** In ΔAPD and ΔBPC, AD = BC, AP = BP and $\angle PAD = \angle PBC = 90^o - 60^o = 30^o$]





8. In the adjacent figure ΔABC, D is the midpoint of BC. $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ and DE = DF. Show that $\Delta BED \cong \Delta CFD$.

9. If the bisector of an angle of a triangle also bisects the opposite side, prove that the triangle is isosceles.



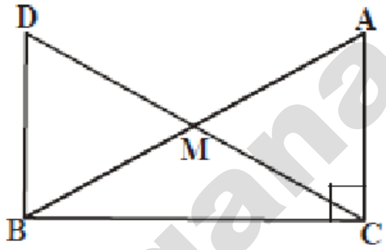
10. In the given figure ABC is a right triangle and right angled at B such that $\angle BCA = 2\angle BAC$. Show that hypotenuse AC = 2BC.

(**Hint** : Produce CB to a point D that BC = BD)

7.4 Some properties of a triangle

In the above section you have studied two criteria for the congruence of triangles. Let us now apply these results to study some properties related to a triangle whose two sides are equal.

6. قائم الزاویہ مثلث ABC میں C پر زاویہ قائمہ ہے۔ M وتر AB کا وسطی نقطہ ہے۔ نقطہ C کو M سے جوڑتے ہوئے نقطہ D تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ $DM = CM$ نقطہ D کو نقطہ B سے جوڑا گیا۔ (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) بتلایئے کہ



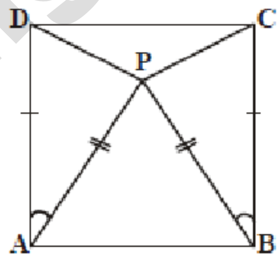
(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ایک قائم الزاویہ ہے۔

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7. متصلہ شکل میں ABCD ایک مربع ہے اور مثلث ΔAPB ایک مساوی اضلاع مثلث ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ $\Delta APD \cong \Delta BPC$

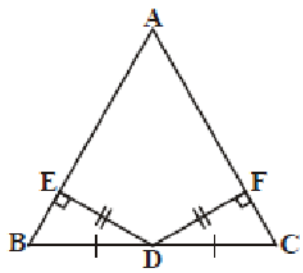


(اشارہ: ΔAPD اور ΔBPC میں $\overline{AD} = \overline{BC}$، $\overline{AP} = \overline{BP}$ اور

$\angle PAD = \angle PBC = 90^{o} - 60^{o} = 30^{o}$)

8. متصلہ شکل مثلث ΔABC میں D ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔

$DE \perp AB$، $DF \perp AC$ اور $DE = DF$ تب ثابت کیجیے کہ $\Delta BED \cong \Delta CFD$



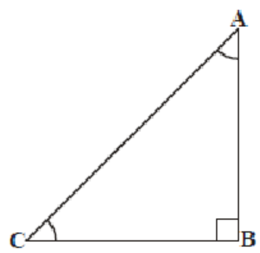
9. اگر ایک مثلث کے ایک زاویہ کا ناصف اس کے مقابل کے ضلع کا بھی ناصف ہو تو بتلایئے کہ یہ ایک مساوی الساقین مثلث ہوگا۔

10. دی گئی شکل میں ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے اور نقطہ B پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔

اس طرح سے کہ $\angle BCA = 2\angle BAC$

تب ثابت کیجیے کہ $AC = 2BC$

(اشارہ: BC کو نقطہ D تک اس طرح بڑھایئے کہ $BC = BD$)

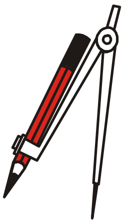


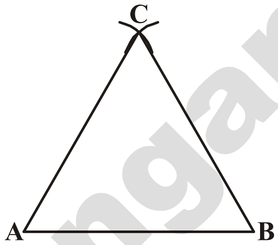
7.4 مثلث کی چند اور خصوصیات رکنیا

مندرجہ بالا سیکشن میں آپ مثلث کی متماثلت کے دو اصولوں سے واقف ہو چکے ہیں۔ آیئے اب ہم ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مثلثات سے جن کے دو ضلعے مساوی ہوں متماثلت کی خصوصیات کا اطلاق کرتے ہیں۔

Activity

i. To contruct a triangle using compass, take any measurement and draw a line segment AB. Now open a compass with sufficient length and put it on point A and B and draw an arc. Which type of triangle do you get? Yes this is an isosceles triangle. So, ΔABC in figure is an isosceles triangle with $AC = BC$. Now measure $\angle A$ and $\angle B$. What do you observe?





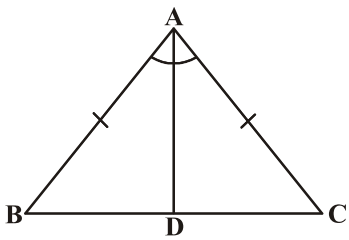
ii. Cut an isosceles triangle

Now fold the triangle so that two congruent sides fit precisely one on top of the other. What do you notice about $\angle A$ and $\angle B$?

You may observe that in each such triangle, the angles opposite to the equal sides are equal.

This is a very important result and is indeed true for any isosceles triangle. It can be proved as shown below.

Theorem-7.2 : Angles opposite to equal sides of an isosceles triangle are equal.



This result can be proved in many ways. One of the proofs is given here.

Given: ΔABC is an isosceles triangle in which $AB = AC$.

RTP: $\angle B = \angle C$.

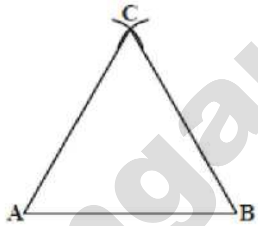
Construction: Let us draw the bisector of $\angle A$ and let D be the point of intersection of this bisector of $\angle A$ and BC.

Proof : In ΔBAD and ΔCAD,

$AB = AC$	(Given)
$\angle BAD = \angle CAD$	(By construction)
$AD = AD$	(Common side)
$\therefore \Delta BAD \cong \Delta CAD$	(By SAS congruency axiom)
So, $\angle ABD = \angle ACD$	(By CPCT)
i.e., $\angle B = \angle C$	(Same angles)

مشغلہ

(i) مثلث بنانے کے لئے کسی بھی پیمائش کا خطی قطعہ AB لیجئے۔اب پرکار کو ایک مخصوص طول تک پھیلاتے ہوئے نقطہ A پر پھر نقطہ B پر رکھتے ہوئے دو قوس کھینچئے جو ایکدوسرے کو قطع کریں۔اس طرح حاصل ہونے والا مثلث کونسا ہوگا؟ ہاں یہ ایک مساوی الساقین مثلث ہوگا۔اس طرح ABC & میں AC = BC 'اوراب آپ A∠ اور B∠ کی پیمائش کیجئے' آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

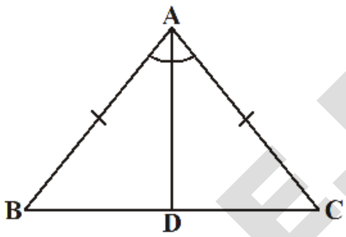


(ii) مساوی الساقین مثلث کو کاٹ لیجیے۔

مثلث کو اس طرح موڑیے کہ ان کے متماثل ضلع ایکدوسرے پر منطبق ہوجائیں۔اب آپ A∠ اور B∠ سے متعلق کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ نے غور کیا ہوگا کہ اس طرح کے مثلث میں ''مساوی ضلعوں کے مخالف زاوئیے بھی مساوی ہوتے ہیں''۔یہ بہت اہم نتیجہ ہے اور یہ ایک مساوی الساقین مثلث کے لیے صادق ہے۔ذیل میں اس کو ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 7.2 : مثلث مساوی الساقین میں مساوی ضلعوں کے مقابل کے زاوئیے بھی مساوی ہوتے ہیں۔



اس نتیجہ کو مختلف طریقوں سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

یہاں پر ثابت کرنے کے لیے ایک طریقہ کو ظاہر کیا گیا ہے۔

دیا گیا ہے: ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$۔

ثابت کرنا ہے کہ: $\angle B = \angle C$

بناوٹ: آیئے ہم $\angle A$ کا ناصف کھینچیں۔اس طرح کہ $\angle A$ ' کے ناصف اور BC کا نقطہ D تقاطع ہے۔

ثبوت: ΔBAD اور ΔCAD میں

$AB = AC$ (دیا گیا ہے)

$\angle BAD = \angle CAD$ (عمل کے ذریعہ سے)

$AD = AD$ (مشترک ضلع)

اس طرح $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (SAS متماثل موضوعہ کے تحت)

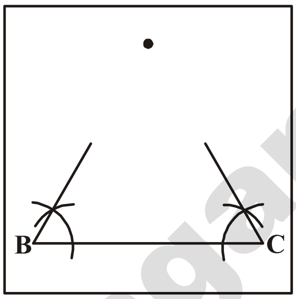
اس طرح $\angle ABC = \angle ACD$ (CPCT کے تحت)

اس لیے $\angle B = \angle C$ (مساوی زاوئیے)

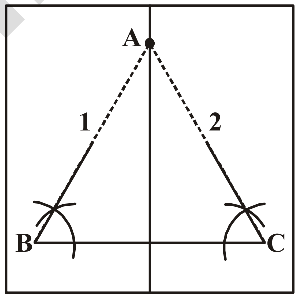
Is the converse also true? That is "If two angles of any triangle are equal, can we say that the sides opposite to them are also equal?"

Activity

1. On a tracing paper draw a line segment BC of length 6cm.
2. From vertices B and C draw rays with angle 60^0 each. Name the point A where they meet.
3. Fold the paper so that B and C fit precisely on top of each other. What do you observe? Is AB = AC?



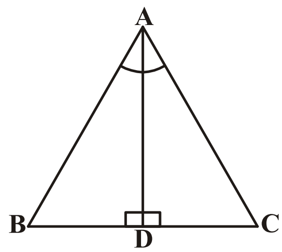
Repeat this activity by taking different angles for $\angle$B and $\angle$C. Each time you will observe that the sides opposite to equal angles are equal. So we have the following



Theorem-7.3 : The sides opposite to equal angles of a triangle are equal.

This is the converse of previous Theorem. You are advised to prove this using ASA congruence rule.

Example-7. In ΔABC, the bisector AD of $\angle A$ is perpendicular to side BC Show that AB = AC and ΔABC is isosceles.



Solution : In ΔABD and ΔACD,

$\angle BAD = \angle CAD$ (Given)

$AD = AD$ (Common side)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (Given)

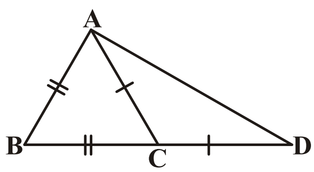
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA rule)

So, AB = AC (CPCT)

or, ΔABC is an isosceles triangle.

Example-8. In the adjacent figure, AB = BC and AC = CD.

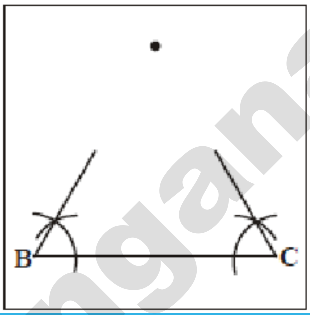
Prove that : $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$.



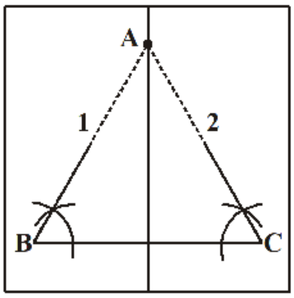
Solution : Let $\angle ADB = x$

کیا اس کا برعکس بھی صادق ہوگا؟ یعنی ’’اگر کسی مثلث کے دو زاویئے مساوی ہیں تب کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان کے مقابل کے ضلعے بھی مساوی ہو سکتے ہیں؟

مشغلہ



1. ایک مہین کاغذ پر خطی قطعہ BC جس کا طول 6 سمر ہو کھینچیے۔
2. راس B اور C پر 60^0 کا زاویہ بناتے ہوئے دو شعاع اس طرح کھینچیے کہ وہ آپس میں ایکدوسرے سے ملتے ہیں‘ اس نقطہ کو A سے ظاہر کیجیے۔
3. کاغذ کو اس طرح تہہ کیجیے کہ B اور C ایک دوسرے پر منطبق ہوں اب آپ نے کیا مشاہدہ کیا ہے؟ کیا AB = AC؟

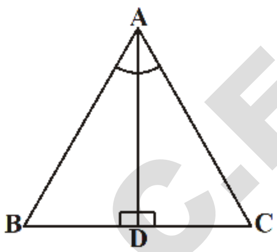


مندرجہ بالا عمل کو $\angle B$ اور $\angle C$ کے مختلف زاویوں سے دہرایئے‘ ہر دفعہ آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلعے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7.3 : ایک مثلث کے مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔

یہ پچھلے مسئلہ کا برعکس ہے۔ طلباء کو ہدایت دی جاتی ہے کہ اس مسئلہ کو ASA کی متماثلت کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں۔

مثال (7) : مثلث ΔABC میں $\angle A$ کا ناصف AD ضلع BC پر عمودوار ہے۔ بتلائیے کہ AB = AC اور ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



حل: ΔABD اور ΔACD میں

$\angle BAD = \angle CAD$ (دیا گیا ہے)

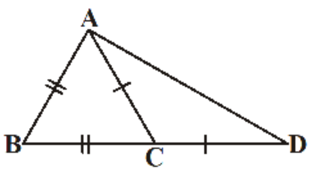
AD = AD (مشترک ضلع)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (دیا گیا)

اس طرح $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA موضوعہ کے تحت)

اس طرح AB = AC (CPCT کے تحت)

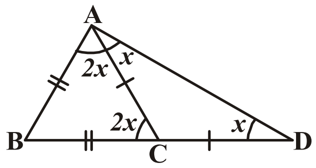
یا ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



مثال (8) : متصلہ شکل میں AB = BC اور AC = CD

ثابت کیجیے کہ $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$

حل : فرض کرو کہ زاویہ $\angle ADB = x$



In $\Delta ACD, AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

and, ext. $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x.$ ($\because$ In ΔABC, $AB = BC$)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 2x + x = 3x$

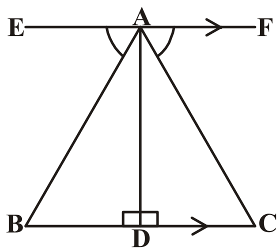
And, $\quad \dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

i.e., $\quad \angle BAD : \angle ADB = 3 : 1.$

Hence Proved.

Example-9. In the given figure, AD is perpendicular to BC and EF $\parallel$ BC, if $\angle EAB = \angle FAC$, show that triangles ABD and ACD are congruent.

Also, find the values of x and y if $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$, $BD = x$ and $DC = y + 1$.



Solution : $AD \perp EF$

$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (given)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

In ΔABD and ΔACD

$\angle BAD = \angle CAD$ [proved above]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [Given $AD \perp BC$]

and $\quad AD = AD$ (Common side)

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [By ASA]

Hence proved.

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ and $BD = CD$ [By C.P.C.T]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ and $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ and $x - y = 1$

Substituting $x = 1 + y$: $\quad 2(1+y) - 3y = -2$

$2 + 2y - 3y = -2$

$-y = -2 - 2$

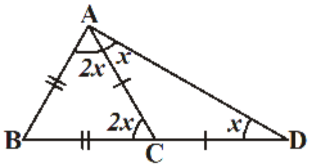
$-y = -4$

Substituting $y = 4$ in $x = 1 + y$

$x = 1 + 4$

$x = 5$

$\therefore \quad x = 5, \; y = 4$



ΔACD میں $AC = CD$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle CDA = x$

اور بیرونی زاویہ $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

(چونکہ ΔABC میں $AB = BC$) $\Rightarrow \angle BAC = \angle ACB = 2x$

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

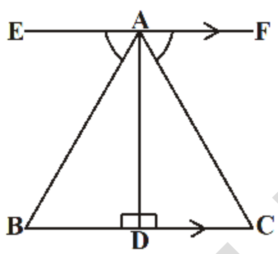
$= 2x + x = 3x$

اور $\dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

اس طرح سے کہ $\angle BAD : \angle ADD = 3 : 1$

جو کہ ثابت کرنا تھا۔

مثال (9): دی گئی شکل میں AD ضلع BC پر عمودوار ہے اور $EF \parallel BC$، اگر $\angle EAB = \angle FAC$، بتلائیے کہ مثلثات ABD اور ACD متماثل ہیں، اوراس کے علاوہ x اور y کی قدر معلوم کیجیے۔
اگر $AB = 2x + 3$، $AC = 3y + 1$، $BD = x$ اور $DC = y + 1$ ہوں



حل : AD، خط EF پر عمودوار ہے۔

$\Rightarrow \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (دیا گیا ہے)

$\Rightarrow \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$

ΔABD اور ΔACD میں

$\angle BAD = \angle CAD$ (اوپر ثابت کیا گیا ہے)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ (دیا گیا ہے کہ AD عمودوار ہے BC ہے۔

$AD = AD$ (مشترک ضلع)

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA کے تحت)

تب ثابت ہوا۔

(CPTCT کی مدد سے) $AB = AC \Rightarrow \angle ABD = \angle ADC$ اور $BD = CD$

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ اور $x = y + 1$

x کی مدد $x = y + 1$ درج کرنے پر

$2(1+y) - 3y = -2$

$2 + 2y - 3y = -2$

$-y = -2 - 2$

$-y = -4$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ اور $x - y = 1$

$y = 4$ کی قدر $x = 1 + y$ میں درج کرنے پر

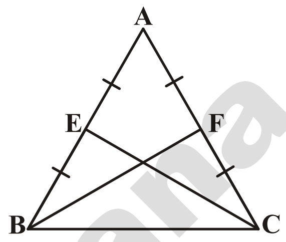
$x = 1 + 4$

$x = 5$

$x=5, y=4$

Example-10. E and F are respectively the mid-points of equal sides AB and AC of ΔABC (see figure) Show that BF = CE

Solution : In ΔABF and ΔACE,



$AB = AC$ (Given)

$\angle A = \angle A$ (common angle)

$AF = AE$ (Halves of equal sides)

$\therefore$ $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS rule)

So, $BF = CE$ (CPCT)

Example-11. In an isosceles triangle ABC with AB = AC, D and E are points on BC such that BE = CD (see figure) Show that AD = AE,

Solution : In ΔABD and ΔACE,

$AB = AC$ (given) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (Angles opposite to equal sides) .... (2)

Also, $BE = CD$

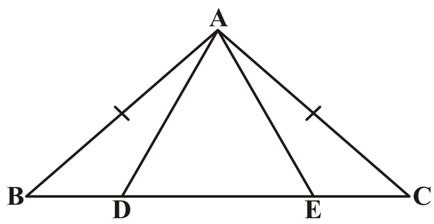
So, $BE - DE = CD - DE$

That is, $BD = CE$ (3)

So, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

(Using (1), (2), (3) and SAS rule).

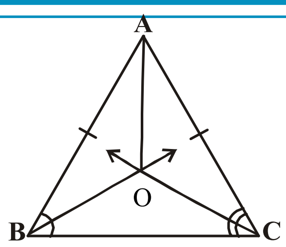
This gives $AD = AE$ (CPCT)



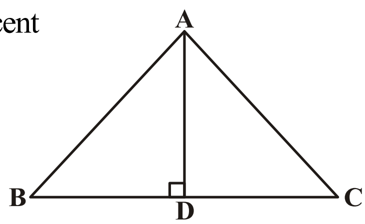
Exercise - 7.2

1. In an isosceles triangle ABC, with AB = AC, the bisectors of $\angle B$ and $\angle C$ intersect each other at O. Join A to O. Show that :

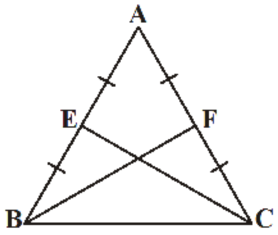
   (i) OB = OC (ii) AO bisects $\angle A$



2. In ΔABC, AD is the perpendicular bisector of BC (See adjacent figure). Show that ΔABC is an isosceles triangle in which AB = AC.



مثال (10) : مثلث ΔABC میں E اور F ترتیب وار مساوی ضلعوں AB اور AC کے وسطی نقاط ہیں۔(شکل دیکھئے)
بتلائیے کہ $BF = CE$



حل : ΔABF اور ΔACE میں

$AB = AC$ (دیا گیا ہے)

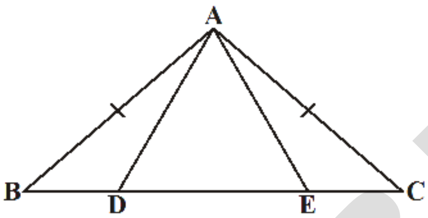
$\angle A = \angle A$ (مشترک زاویہ)

$AF = AE$ (مساوی کا ناصف)

اس طرح $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS موضوعے کے تحت)

اس لئے $BF = CE$ (CPCT کے تحت)

مثال (11) : مساوی الساقین مثلث ABC میں $AB = AC$، D اور E ضلع BC پر اس طرح لیے گئے نقاط ہیں $BE = CD$۔
(شکل دیکھئے) بتلائیے کہ $AD = AE$۔



حل : ΔABD اور ΔACE میں

$AB = AC$ (دیا گیا ہے) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (مساوی ضلعوں کے مقابل زاویے) .... (2)

اس کے علاوہ $BE = CD$

لہٰذا $BE - DE = CD - DE$

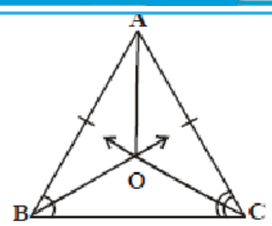
یعنی $BD = CE$ ---------- (3)

اس طرح $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

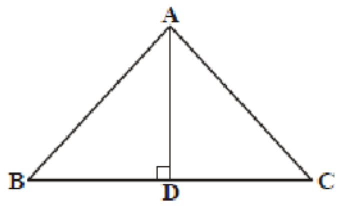
(1)، (2) اور (3) اور SAS موضوعہ کی مدد سے

$AD = AE$ حاصل ہوتا ہے (CPCT کے تحت)

مشق 7.2

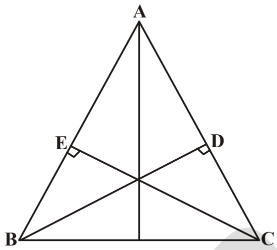


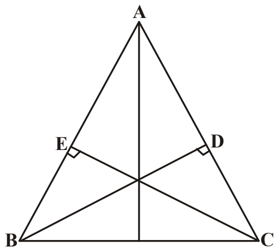
1. مساوی الساقین مثلث ABC میں $AB = AC$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
راس A کو O سے جوڑیے۔
بتلائیے کہ:
(i) $OB = OC$ (ii) AO، زاویے $\angle A$ کا ناصف ہے۔



2. ΔABC میں AD ضلع BC کا عمودی ناصف ہے (متصلہ شکل دیکھیے)
بتلائیے کہ ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$

3. ABC is an isosceles triangle in which altitudes BD and CE are drawn to equal sides AC and AB respectively (see figure) Show that these altitudes are equal.

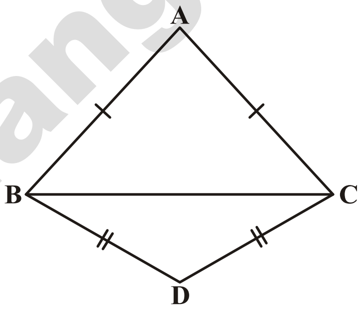




4. ABC is a triangle in which altitudes BD and CE to sides AC and AB are equal (see figure) . Show that

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

   (ii) $AB = AC$ i.e., ABC is an isosceles triangle.



5. ΔABC and ΔDBC are two isosceles triangles on the same base BC (see figure). Show that $\angle ABD = \angle ACD$.

7.5 Some more criteria for congruency of triangles

Theorem 7.4 (SSS congruence rule) : Through construction we have seen that SSS congruency rule hold. This theorem can be proved using a suitable construction.

In two triangles, if the three sides of one triangle are respectively equal to the corresponding three sides of another triangle, then the two triangles are congruent.

• **Proof for SSS Congruence Rule**

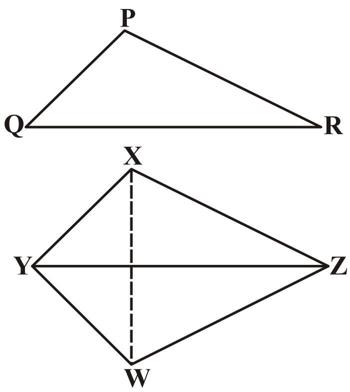
Given: ΔPQR and ΔXYZ are such that $PQ = XY$, $QR = YZ$ and $PR = XZ$

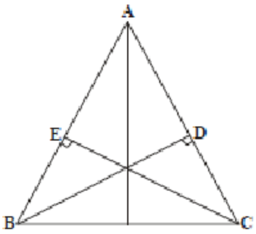
To Prove : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

Construction : Draw YW such that $\angle ZYW = \angle PQR$ and $WY = PQ$. Join XW and WZ

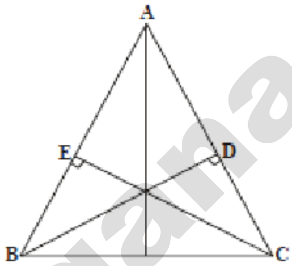
Proof: In ΔPQR and ΔWYZ

$QR = YZ$	(Given)
$\angle PQR = \angle ZYW$	(Construction)
$PQ = YW$	(Construction)
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$	(SAS congruence axiom)





.3 مساوی الساقین مثلث $\Delta\, ABC$ میں BD اور CE ترتیب وار مساوی ضلعوں AC اور AB کی کھینچی گئی بلندیاں ہیں (شکل دیکھیے) بتلائیے کہ یہ بلندیاں مساوی ہیں۔

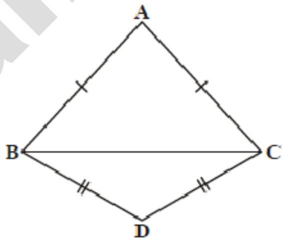


.4 ABC ایک مثلث ہے جس میں مساوی طول والے ضلعے AC اور AB پر لیے گئے ارتفاع BD اور CE کے طول مساوی ہیں۔ (شکل دیکھیے)

بتلائیے کہ

(i) $\Delta ABD \cong \Delta\, ACE$

(ii) $AB = AC$ یعنی ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



.5 ΔABC اور ΔDBC دو مساوی الساقین مثلثات ہیں جن کا ایک ہی قاعدہ BC ہے (شکل دیکھیے)

بتلائیے کہ $\angle ABD = \angle ACD$

7.5 مثلثات میں متماثلات کے مزید اصول

مسئلہ 7.4 : (SSS متماثلہ کا اصول)

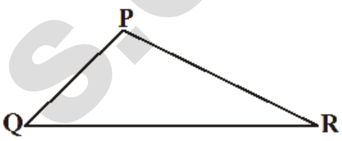
بناوٹ کے تحت ہم جان چکے ہیں کہ SSS متماثلات کا اصول وجود رکھتا ہے۔ اس مسئلہ کو عملی بناوٹ کے استعمال سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

دو مثلثات میں اگر ایک مثلث کے تین ضلعے ترتیب وار دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔

SSS متماثلہ کا اصول کے ذریعہ ثبوت:

دیا گیا ہے کہ: ΔPQR اور ΔXYZ اس طرح ہے کہ $PQ = XY$ ، $QR = YZ$ اور $PR = XZ$

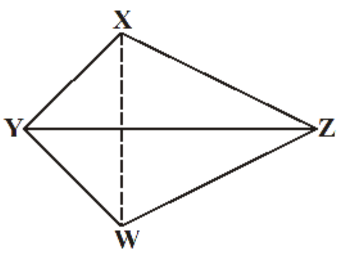
ثابت کرنا ہے کہ: $\Delta\, PQR \cong \Delta\, XYZ$



عمل: YW اس طرح کھینچیے کہ $\angle ZYW = \angle PQR$ اور

$PQ = WY$ ، XW اور WZ کو جوڑیئے۔

ثبوت: ΔPQR اور $\Delta\, WYZ$ میں



$QR = YZ$	(دیا گیا ہے)
$\angle PQR = \angle ZYW$	(عملی بناوٹ کے ذریعہ)
$PQ = YW$	(عملی بناوٹ کے ذریعہ)
$\Delta\, PQR \cong \Delta\, WYZ$	(SAS متماثل موضوعہ کے تحت)

$\Rightarrow \angle P = \angle W$ and PR = WZ (CPCT)

PQ = XY (given) and PQ = YW (Construction)

$\therefore$ XY = YW

Similarly, XZ = WZ

In ΔXYW, XY = YW

$\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$ (In a triangle, equal sides have equal angles opposite to them)

Similarly, $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

Now, $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

In ΔPQR and ΔXYZ

PQ = XY

$\angle P = \angle X$

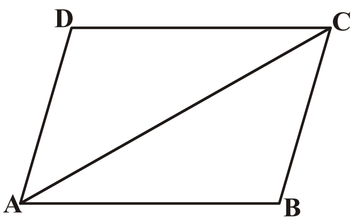
PR = XZ

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS congruence criterion)

Let us see the following example based on it.

Example-12. In quadrilateral ABCD, AB = CD, BC=AD show that $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Consider ΔABC and ΔCDA



Solution : AB = CD (given)

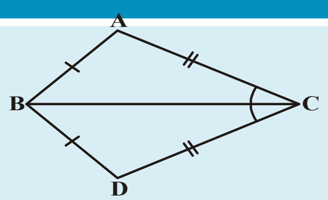
AD = BC (given)

AC = CA (common side)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (by SSS congruency rule)

Do This

1. In the adjacent figure ΔABC and ΔDBC are two triangles such that AB = BD and AC= CD. Show that $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.



You have already seen that in the SAS congruency axiom, the pair of equal angles has to be the included angle between the pairs of corresponding equal sides and if not so, two triangles may not be congruent.

$PR = WZ$ (CPCT) اور $\Rightarrow \angle P = \angle W$

$PQ = XY$ (دیا گیا ہے کہ) اور $PQ = YW$ (عملی بناوٹ)

$\therefore XY = YW$

اسی طرح $XZ = WZ$

ΔXYW میں $XY = YW$

(مثلث میں مساوی ضلعوں کے مقابل زاویئے مساوی ہوتے ہیں) $\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$

اسی طرح $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

اب $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR اور ΔXYZ میں

$PQ = XY$

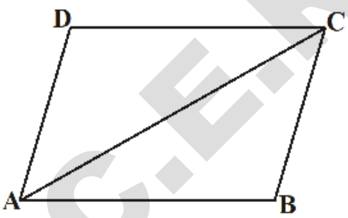
$\angle P = \angle X$

$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS متماثل موضوعہ کے تحت)

آیئے اب ہم مندرجہ ذیل مثال کو اس موضوعہ کے تحت حل کریں گے۔

مثال (12) : چار ضلعی ABCD میں $AB = CD$، $BC = AD$ بتلائیے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔

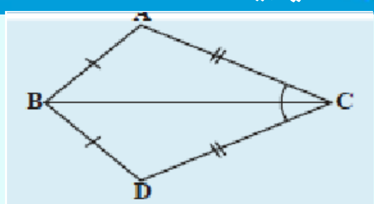
$AB = CD$ (دیا گیا ہے کہ)

$AD = BC$ (دیا گیا ہے کہ)

$AC = CA$ (مشترک ضلع)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (SSS متماثل موضوعہ کے تحت)

یہ کیجیے



1. متصلہ شکل میں ΔABC اور ΔDBC دو مثلثات اس طرح ہیں $AB = BD$ اور $AC = CD$ ہیں۔
بتلائیے کہ $\Delta ABC \cong \Delta BDC$

SAS متماثل موضوعہ کے تحت آپ یہ جان چکے ہیں کہ مساوی زاویوں کے جوڑ، مساوی متناظر ضلعوں کے جوڑ کے درمیان واقع ہوتے ہیں، اور اگر ایسا ہو تو دیئے گئے دو مثلثات متماثل نہیں ہوسکتے۔

ACTIVITY

Construct a right angled triangle with hypotenuse 5 cm. and one side 3 cm. long. How many different triangles can be constructed? Compare your triangle with those of the other members of your class. Are the triangles congruent? Cut them out and place one triangle over the other with equal side placed on each other. Turn the triangle if necessary what do you observe? You will find that two right triangles are congruent, if side and hypotenuse of one triangle are respectively equal to the corresponding side and hypotenuse of other triangle.

Note that the right angle is not the included angle in this case. So we arrive at the following congruency rule.

Theorem 7.5 (RHS congruence rule) : If in two right triangles the hypotenuse and one side of one triangle are equal to the hypotenuse and one side of the another triangle, then the two triangles are congruent.

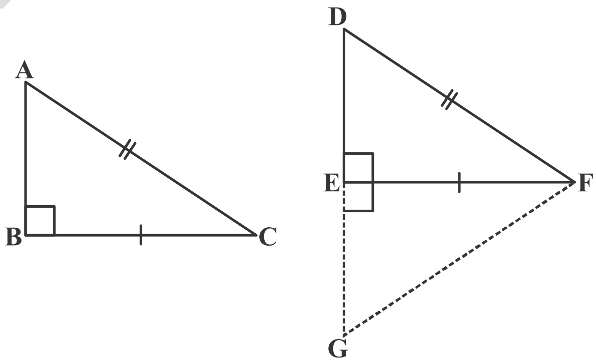
Note that RHS stands for right angle - hypotenuse-side.

Let us prove it.

Given: Two right triangles, ΔABC and ΔDEF

in which $\angle B = 90^o$ and $\angle E = 90^o$;

$AC = DF$ and $BC = EF$.



To prove: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Construction: Produce DE to G

So that EG = AB. Join G, F.

Proof:

In ΔABC and ΔGEF

$AB = GE$	(By construction)
$\angle B = \angle FEG$	(Each angle is a right angle (90^0))
$BC = EF$	(Given)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(By SAS criterion of congruence)
So $\angle A = \angle G$ … (1)	(CPCT)

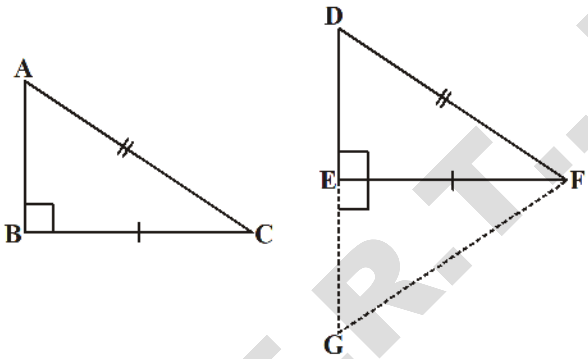
کوشش کیجیے

ایک قائم الزاویہ مثلث جس کا وتر 5cm اور اس کا ضلع 3cm ہو بتائیے کہ ان پیمائشوں سے کتنے مختلف مثلثات بنائے جاسکتے ہیں؟ آپ کے بنائے ہوئے مثلث کا آپ کے ہم جماعت بچوں کے بنائے ہوئے مثلثات سے تقابل کیجیے۔ کیا مثلثات متماثل ہیں؟ ان مثلثات کو کاٹ کر ان کے مساوی ضلعوں کے لحاظ سے ایکدوسرے پر رکھیے اور اگر ضرورت ہونے پر ان کو پلٹائیے اور آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ دو قائم الزاویہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں' اگر ان میں ایک ضلع اور وتر دوسرے مثلث کے متناظر ضلع اور وتر کے مساوی ہوں۔

نوٹ: آپ جانتے ہیں کہ مثلث قائم الزاویہ اس صورت میں دو ضلعوں کا درمیانی زاویہ نہیں ہے' اس سے ہم مثلثات کا ایک اور اصول مدون کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.5 : (RHS متماثل کا اصول): اگر دو قائم الزاویہ مثلثات میں ایک مثلث کا وتر اور اس کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور اس کے ایک ضلع کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات ایکدوسرے کے متماثل ہوں گے۔

نوٹ: یاد رکھیے کہ RHS کا مطلب (Right angle - Hypotenuse- Side) (قائم الزاویہ۔وتر۔ضلع) ہوتا ہے۔



آیئے اس کو ثابت کریں۔

دیا گیا ہے: ΔABC اور ΔDEF دو قائم الزاویہ مثلثات ہیں' جس میں $\angle B = 90^\circ$ اور $\angle E = 90^\circ$، $AC = DF$ اور $BC = EF$

ثابت کرنا ہے کہ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

بناوٹ DE کو G تک اس طرح کھینچئے کہ $GE = AB$' G کو F سے جوڑیئے۔

ثبوت

ΔABC اور ΔGEF میں

$AB = GE$ (بناوٹ کے ذریعہ)

$\angle B = \angle FEG$ (ہر ایک زاویہ زاویہ قائمہ ہے یعنی 90^0)

$BC = EF$ (دیا گیا ہے)

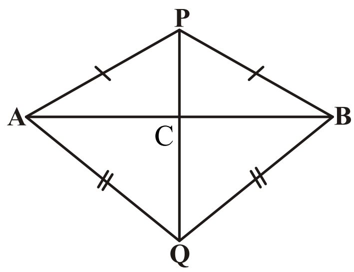
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$ (SAS موضوعہ کے تحت)

اس طرح $\angle A = \angle G$ ...... (1) (CPCT)

$AC = GF \ldots (2)$	(CPCT)
Further, AC=GF and AC=DF	(From (2) and Given)
$\therefore$ DF = GF	(From the above)
So, $\angle D = \angle G \ldots (3)$	(Angles opposite to equal sides are equal)
we get $\angle A = \angle D \ldots (4)$	(From (1) and (3))
Thus, in ΔABC and ΔDEF $\angle A = \angle D$,	(From (4))
$\angle B = \angle E$	(Given)
So, $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$	(on adding)
But $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ and	(angle sum property of triangle)
$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$	
$180 - \angle C = 180 - \angle F$	($\angle A + \angle B = 180^0 - \angle C$ and $\angle D + \angle E = 180^0 - \angle F$)
So, $\angle C = \angle F, \ldots (5)$	(Cancellation laws)
Now, in ΔABC and ΔDEF, we have	
BC = EF	(given)
$\angle C = \angle F$	(from (5))
AC = DF	(given)
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(by SAS axiom of congruence)

Example-13. AB is a linesegment. P and Q are points on either side of AB such that each of them is equidistant from the points A and B (See Fig). Show that the line PQ is the perpendicular bisector of AB.

Solution : You are given that PA = PB and QA = QB and you have to show that PQ is perpendicular on AB and PQ bisects AB. Let PQ intersect AB at C.



Can you think of two congruent triangles in this figure ?

Let us take ΔPAQ and ΔPBQ.

In these triangles,

AP = BP (Given)

AQ = BQ (Given)

PQ = PQ (Common side)

So, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS rule)

Therefore, $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT).

Now let us consider ΔPAC and ΔPBC.

You have : AP = BP (Given)

$AC = GF$ ...... (2) (CPCT)

ان کےعلاوہ $AC = DF$ اور $AC = GF$ (مساوات 2اور دیا گیا ڈیٹا)

اس طرح $DF = GF$ (اوپر سے)

اس طرح $\angle D = \angle G$ ...... (3) (مساوی ضلعوں کا مقابل زاویہ)

ہم حاصل کرتے ہیں $\angle A = \angle D$ ...... (4) (1 اور 3 کی مدد سے)

اس طرح ΔABC اور ΔDEF میں $\angle A = \angle D$ (مساوات 4 سے)

$\angle B = \angle E$ (دیا گیا ڈیٹا)

اس طرح $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$ (جمع کرنے پر)

لیکن $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ اور (مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت کے تحت)

$\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$

$180 - \angle C = 180 - \angle F$ ($\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$ اور $\angle D + \angle E = 180^\circ - \angle F$)

اس طرح $\angle C = \angle F$ ...... (5) (Cancellation laws)

اب ΔABC اور ΔDEF میں

ہم حاصل کرتے ہیں $BC = EF$ (دیا گیا ہے)

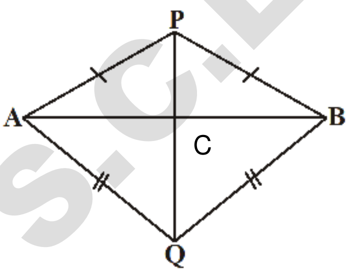
$\angle C = \angle F$ (5 سے)

$AC = DF$ (دیا گیا ہے)

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثل موضوعہ کے تحت)

مثال (13): AB ایک خطی قطعہ ہے،نقاط P اور Q خط AB کے دونوں جانب A اور B سے مساوی فاصلے پر واقع ہیں۔(شکل دیکھئے)
بتلائیے کہ خط PQ خطی قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔

حل : دیا گیا ہے کہ $PA = PB$ اور $QA = QB$ اور آپ کو ثابت کرنا ہے کہ PQ خطی قطعہ AB پر عموددار ہے اور AB کا ناصف ہے۔
فرض کرو کہ PQ خط AB کو نقطہ C پر قطع کرتا ہے۔



کیا آپ اس شکل میں دو متماثل مثلث پاتے ہیں؟

ΔPAQ اور ΔPBQ ان مثلثات میں

$AP = BP$ (دیا گیا ہے)

$AQ = BQ$ (دیا گیا ہے)

$PQ = PQ$ (مشترک ضلع)

اس طرح $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS متماثل اصول کے تحت)

اس طرح $\angle APQ = \angle BPQ$ (متماثل مثلثات کے متناظر زاویئے کے تحت)

اب آیئے ΔPAC اور ΔPBC پر غور کریں۔

$AP = BP$ (دیا گیا ہے)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ proved above)

$PC = PC$ (Common side)

So, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS rule)

$\therefore$ $AC = BC$ (CPCT) .... (1)

and $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

Also, $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (Linear pair)

So, $2\angle ACP = 180°$

or, $\angle ACP = 90°$ .... (2)

From (1) and (2), you can easily conclude that PQ is the perpendicular bisector of AB.

[Note that, without showing the congruence of ΔPAQ and ΔPBQ, we cannot show that $\Delta PAC \cong \Delta PBC$]

$AP = BP$ (Given)

$PC = PC$ (Common side)

and $\angle PAC = \angle PBC$ (Angles opposite to equal sides in ΔAPB)

It is because these results give us SSA rule which is not always valid or true for congruence of triangles as the given angle is not included between the equal pairs of sides.]

Now observe some more examples.

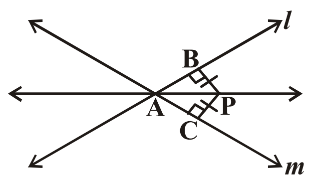
Example-14. P is a point equidistant from two lines l and m intersecting at point A (see figure). Show that the line AP bisects the angle between them.

Solution : You are given that lines l and m intersect each other at A.

$PB \perp l$ and $PC \perp m$. It is given that $PB = PC$.

You need to show that $\angle PAB = \angle PAC$.

Let us consider ΔPAB and ΔPAC. In these two triangles,



$PB = PC$ (Given)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (Given)

$PA = PA$ (Common side)

So, $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS rule)

So, $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ اوپر ثابت کیا گیا)

$PC = PC$ (مشترک ضلع)

اس طرح $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS اصول کے تحت)

اس لئے $AC = BC$ ...... (1)

اور $\angle ACP = \angle BCP$ (متماثل مثلثات کے متناظر زاویئے کے تحت)

اس طرح $\angle ACP + \angle BCP = 180^\circ$ (خطی زاویہ کے جوڑ)

اس طرح $2\angle ACP = 180^\circ$

یا $\angle ACP = 90^\circ$ ...... (2)

(1) اور (2) کی مدد سے آپ کہہ سکتے ہیں کہ PQ خطی قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔

نوٹ کیجئے ΔPAQ اور ΔPBQ کی متماثلت ثابت کئے بغیر ہم $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ ثابت نہیں کر سکتے۔

$AP = BP$ (دیا گیا ہے)

$PC = PC$ (مشترک ضلع)

اور $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB کے مساوی ضلعوں کے مقابل زاویئے)

اس کی وجہ یہ ہے کہ ان نتائج سے ہمیں متماثلت کا SSA اصول حاصل ہوتا ہے۔ جو ہمیشہ درست نہں ہوتا۔ چونکہ اس سے یہ SSA اصول اخذ ہوتا ہے۔ یہ موضوعہ ہمیشہ درست یا صادق نہیں ہے چونکہ دیا ہوا زاویہ ضلعوں کے مساوی جوڑ کے درمیان شامل نہیں ہے۔

آیئے چند مزید سوالات پر غور کرتے ہیں۔

مثال (14) : دو قاطع خطوط l اور m سے جو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں سے نقطہ P مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ خط AP ان دونوں کے درمیان بننے والا زاویٔ ناصف ہے۔

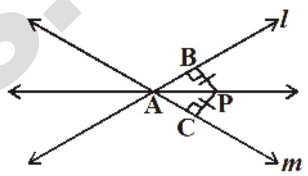
حل : دیا گیا ہے کہ خطوط l اور m نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

PB خط l پر عمود وار ہے اور $PC \perp m$ اور دیا گیا ہے

$PB = PC$

ثابت کرنا ہے کہ $\angle PAB = \angle PAC$

ΔPAB ، ΔPAC پر غور کیجئے۔



$PB = PC$ (دیا گیا ہے)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^\circ$ (دیا گیا ہے)

$PA = PA$ (مشترک ضلع)

$\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS اصول کے تحت)

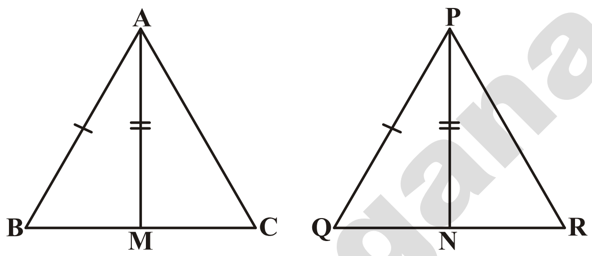
اس طرح $\angle PBA = \angle PCA$ (متماثل مثلثات کے متناظر زاویئے کے تحت)

EXERCISE - 7.3

1. AD is an altitude of an isosceles triangle ABC in which AB = AC.

   Show that, (i) AD bisects BC (ii) AD bisects $\angle$A.

2. Two sides AB, BC and median AM of one triangle ABC are respectively equal to sides PQ and QR and median PN of ΔPQR (See figure). Show that:

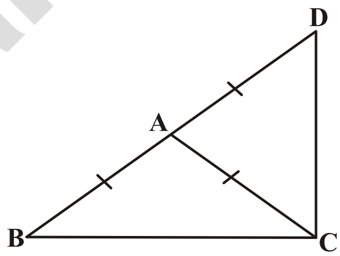
   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

3. BE and CF are two equal altitudes of a triangle ABC. Using RHS congruence rule, prove that the triangle ABC is isosceles.

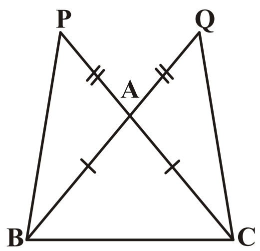
4. ΔABC is an isosceles triangle in which AB = AC. Show that $\angle B = \angle C$.

   (Hint : Draw AP $\perp$ BC) (Use RHS congruence rule)

5. ΔABC is an isosceles triangle in which AB = AC. Side BA is produced to D such that AD = AB (see figure). Show that $\angle$BCD is a right angle.

6. ABC is a right angled triangle in which $\angle A = 90^0$ and AB = AC. Show that $\angle B = \angle C$.

7. Show that the angles of an equilateral triangle are 60^0 each.

8. In the adjacent figure ΔABC is isosceles as AB=AC, BA and CA and CA are produced to Q and P such that AQ=AP. Show that PB=QC.

   (**Hint :** Compare ΔAPB and ΔAQC)

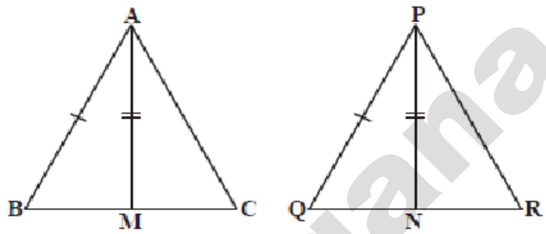
7.6 INEQUALITIES IN A TRIANGLE

So far, you have been studying the equality of sides and angles of a triangle or triangles. Sometimes, we do come across unequal figures and we need to compare them. For example, line segment AB is greater in length as compared to line segment CD in figure (i) and $\angle$A is greater than $\angle$B in following figure (ii).

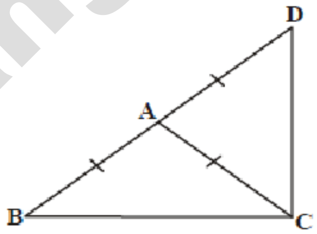
مشق 7.3

1. مساوی الساقین مثلث ABC میں AD بلندی ہے اور $AB = AC$ تب بتلائیے کہ (i) AD ضلع BC کا ناصف ہے (ii) AD کی $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے؟

2. ایک مثلث ABC کے دو ضلع AB، BC اور وسطانیہ AM دوسرے مثلث PQR کے دو ضلع PQ، QR اور وسطانیہ PN کے مساوی ہے۔(شکل دیکھئے) بتلائیے کہ (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

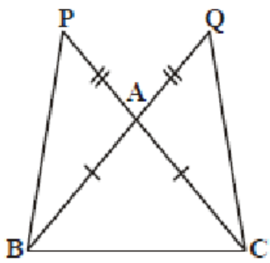


3. BE اور CF ΔABC میں دو مساوی بلندیاں ہیں۔ RHS متماثلت کا اصول استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



4. ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$ بتلائیے کہ $\angle B = \angle C$
(اشارہ $AP \perp BC$ کھینچئے اور RHS اصول متماثلت کے رو سے)

5. ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$ ضلع BA کو D اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ $AD = AB$ (شکل دیکھئے) بتلائیے کہ $\angle BCD$ ایک قائم الزاویہ ہے۔



6. ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس میں $\angle B = 90^0$ اور $AB = AC$ بتلائیے کہ $\angle B = \angle C$

7. بتلائیے کہ مساوی الاضلاع مثلث کا یہ زاویہ 60^0 کا ہوتا ہے۔

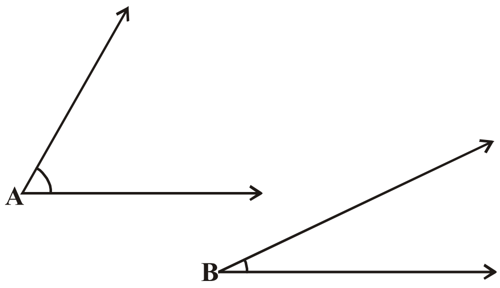
8. متصلہ شکل میں ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جیسا کہ $AB = AC$، BA اور CA کو نقطہ P اور نقطہ Q تک توسیع دی گئی ہے اس طرح کہ $AQ = AP$ تب بتلائیے کہ $PB = QC$ (اشارہ: ΔAPB اور ΔAQC میں موازنہ کیجیے۔)

7.6 مثلث میں غیر مساوایت

اب تک ہم مثلثات میں ان کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان مماثلت کے بارے میں واقف ہو چکے ہیں۔

بعض اوقات ہم کو غیر مساوی اشکال کا ایک دوسرے سے تقابل کرنا پڑھتا ہے۔مثلاً خطی قطعہ AB بڑا خطی قطعہ CD سے جسے شکل (i) میں اور $\angle A$ ' بڑا ہے $\angle B$ سے جسے شکل (ii) میں ظاہر کیا گیا ہے۔

(i)



(ii)

Let us now examine whether there is any relation between unequal sides and unequal angles of a triangle. For this, let us perform the following activity:

Activity

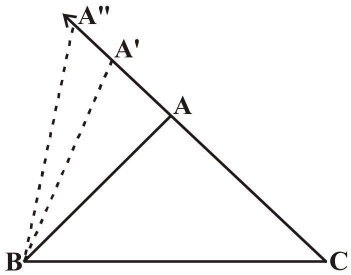
1. Draw a triangle ABC mark a point A' on CA produced (new position of it)

So, $A'C > AC$ (Comparing the lengths)

Join A' to B and complete the triangle $A'BC$.

What can you say about $\angle A'BC$ and $\angle ABC$?

Compare them. What do you observe?



Clearly, $\angle A'BC > \angle ABC$

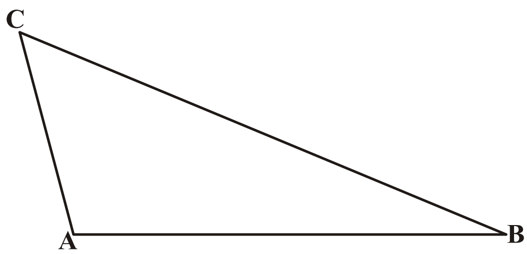
Continue to mark more points on CA (extended) and draw the triangles with the side BC and the points marked.

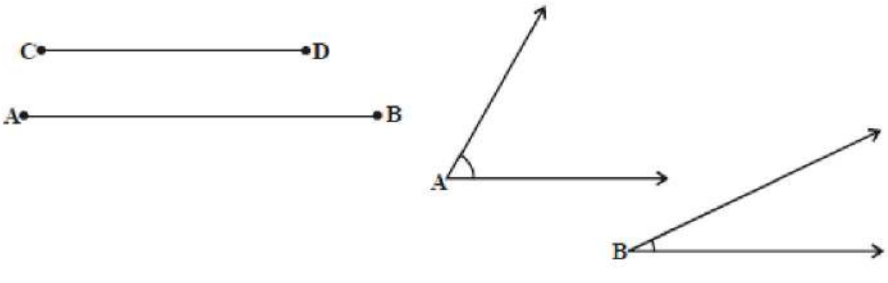
You will observe that as the length of the side AC is increases (by taking different positions of A), the angle opposite to it, that is, $\angle B$ also increases.

Let us now perform another activity-

2. Construct a scalene triangle ABC (that is a triangle in which all sides are of different lengths). Measure the lengths of the sides.

Now, measure the angles. What do you observe?





(i) (ii)

آیئے اب ہم جانچ کریں گے مثلث کے ان غیر مساوی ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی رشتہ پایا جاتا ہے۔ اس کے لیے مندرجہ ذیل مشغلے کو انجام دیں۔

مشغلہ

1. ایک مثلث ABC کھینچئے CA پر A' کا نشان لگائیے۔

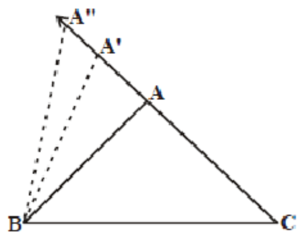
اس طرح A'C > AC (طول کا تقابل کیجیے)

نقطہ A کو B سے جوڑیئے اور مثلث A' BC کو مکمل کیجیے۔

آپ ∠A'BC اور ∠ABC کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ان زاویوں کا تقابل کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

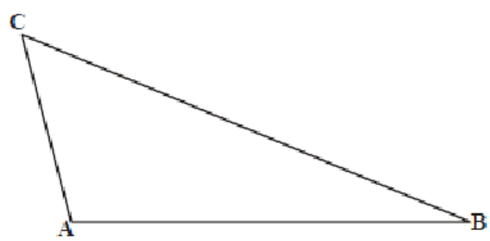
واضح طور پر ∠A'BC > ∠ABC



اس طرح خط CA کو بڑھاتے ہوئے نقاط کی نشاندہی کے ساتھ ضلع BC سے جوڑتے ہوئے مثلثات بنائیے۔
آپ مشاہدہ کریں گے کہ جیسے جیسے ضلع AC کے طول میں اضافہ ہوگا (A کے ہر نقطہ کے لیے) اس ضلع کے مقابل کے ∠B میں بھی اضافہ ہوگا۔

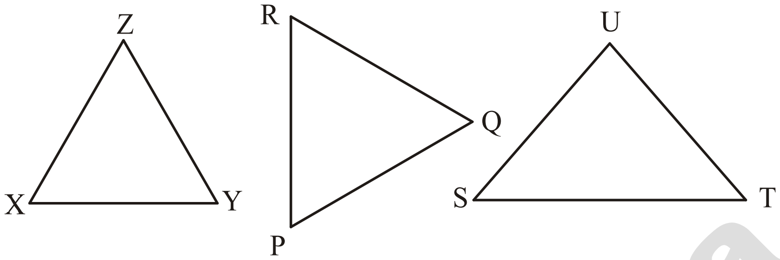
آیئے اب ہم ایک مشغلہ کریں گے۔

2. ایک مختلف الاضلاع مثلث ABC بنائیے (یعنی مثلث جس کے تمام ضلعوں کے طول مختلف ہوتے ہیں) ان کے ضلعوں کے طول کی پیمائش کیجیے۔



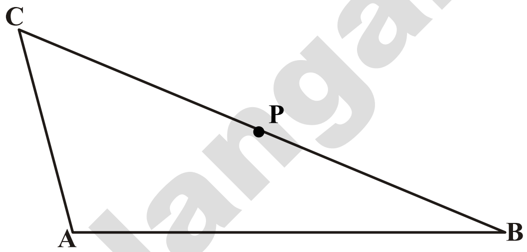
اب ان کے زاویوں کی پیمائش کیجیے، آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

In ΔABC Figure, BC is the longest side and AC is the shortest side. Also, $\angle A$ is the largest and $\angle B$ is the smallest.



Measure angles and sides of each of the above triangles, what is the relation between a side and its opposite angle when campared with another pair?

Theorem-7.6 : If two sides of a triangle are unequal, the angle opposite to the longer side is larger (or greater).

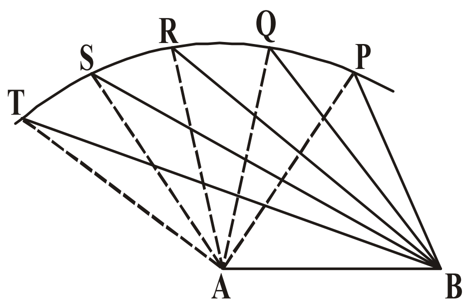


You may prove this theorem by taking a point P on BC such that CA = CP as shown in adjacent figure.

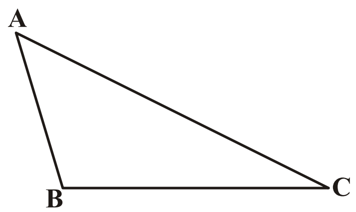
Now, let us do another activity:

ACTIVITY

Draw a line-segment AB. A as centre draw an arc with some radius. Mark different points P, Q, R, S and T on it.



Join each of these points with A as well as with B (see figure). Observe that as we move from P to T, $\angle A$ is becoming larger and larger. What is happening to the length of the side opposite to it? Observe that the length of the side is also increasing; that is $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ and TB > SB > RB > QB > PB.

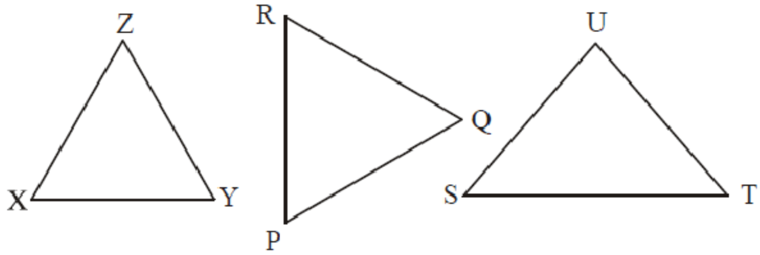


Now, draw any triangle with all angles unequal to each other. Measure the lengths of the sides (see figure).

Observe that the side opposite to the largest angle is the longest. In figure, $\angle B$ is the largest angle and AC is the longest side.

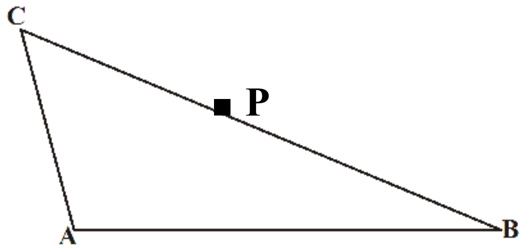
Repeat this activity for some more triangles and we see that the converse of the above Theorem is also true.

ΔABC میں BC سب سے بڑا ضلع ہے جب کہ AC سب سے چھوٹا ضلع ہے۔اس لیے A سب سے بڑا زاویہ اور $\angle B$ سب سے چھوٹا زاویہ ہے۔



مندرجہ بالا مثلثات میں ہر مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی پیائش کیجیے' ان کے ضلع اور مقابل کے زاویہ کا تقابل دوسرے جوڑ سے کرتے ہوئے ان کے درمیان رشتہ معلوم کیجیے۔

مسئلہ 7.6 : اگر ایک مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوتے ہیں تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ بھی بڑا ہوتا ہے۔



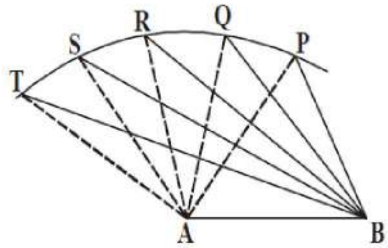
آپ اس مسئلہ کو نقطہ P ضلع BC پر اس طرح CA = CP لیتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں جیسا کہ متعلقہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

آیئے اب ہم مزید ایک اور مشغلہ کریں گے۔

مشغلہ

ایک خطی قطعہ AB کھینچئے' A کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر کا ایک قوس بنائیے اور اس قوس پر مختلف نقاط S,R,Q,P اور T لگائیے۔

ہر ایک نقطہ کو A اور B کے ساتھ جوڑے۔(شکل دیکھیے)

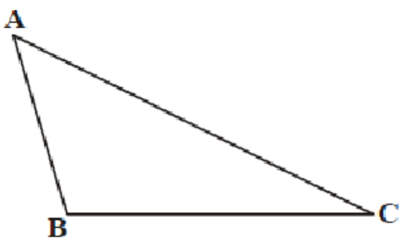


مشاہدہ کیجیے کہ جیسے جیسے ہم نقطہ P سے T کی طرف بڑھتے ہیں۔اس طرح $\angle A$ بھی بڑھتا جاتا ہے' کیا آپ جانتے ہیں کہ مقابل کے ضلع کے طول میں کیا تبدیلی واقع ہو رہی ہے؟

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ ضلع کے طول میں بھی اضافہ ہوتا ہے یعنی

$\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ اور

$TB > SB > QB > PB$

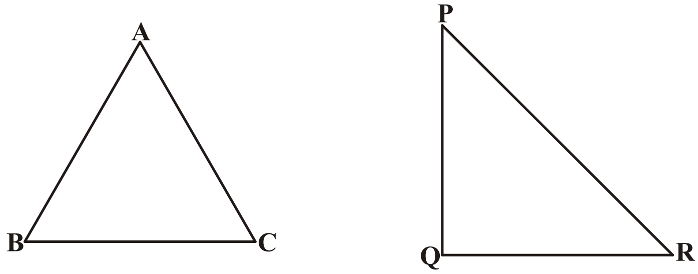


اب آپ کوئی بھی مثلث جس کے تینوں زاویے مختلف ہوں کھینچئے۔اس کے اضلاع کے طول کی پیائش کیجیے۔(شکل دیکھیے)

آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ سب سے بڑے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول بڑا ہوگا۔شکل میں $\angle B$ سب سے بڑا زاویہ ہے اور اس کے مقابل کا ضلع AC سب سے بڑا ضلع ہے۔

مندرجہ بالا مشغلے کو چند مزید مثلثات کے لیے دہرائیے ہم دیکھیں گے کہ اس مسئلہ کا برعکس بھی ہمیشہ صادق ہوتا ہے۔

Measure angles and sides of each triangle given below. What relation you can visualize for a side and its opposite angle in each triangle.



In this way, we arrive at the following theorem.

Theorem -7.7 : In any triangle, the side opposite to the larger (greater) angle is longer.

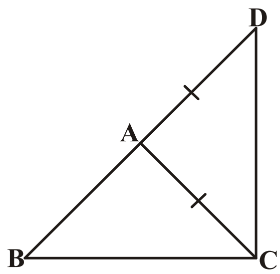
This theorem can be proved by the method of contradiction.

Do This

Now draw a triangle ABC and measure its sides. Find the sum of the sides AB + BC, BC + AC and AC + AB, compare it with the length of the third side. What do you observe?

You will observe that AB + BC > AC, BC + AC > AB and AC + AB > BC. Repeat this activity with other triangles and with this you can arrive at the following theorem:

Theorem-9.8 : The sum of any two sides of a triangle is greater than the third side.

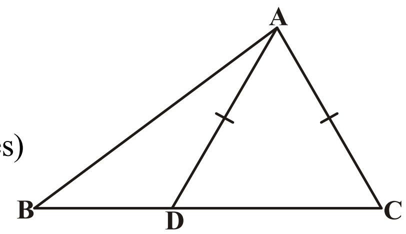


In adjacent figure, observe that the side BA of ΔABC has been produced to a point D such that AD = AC. Can you show that $\angle BCD > \angle BDC$ and BA + AC > BC?

Have you arrived at the proof of the above theorem.

Let us take some examples based on these results.

Example-15. In ΔABC, D is a point on side BC ΔABC such that AD = AC (see figure). Show that AB > AD.



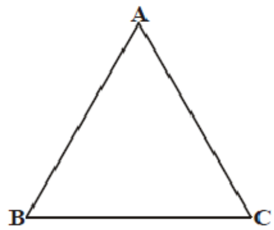
Solution : In ΔDAC,

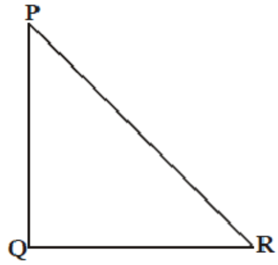
AD = AC (Given)

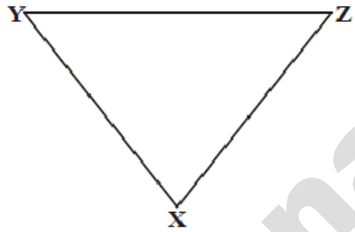
So, $\angle ADC = \angle ACD$ (Angles opposite to equal sides)

Now, $\angle ADC$ is an exterior angle for ΔABD.

ذیل میں دیئے گئے مثلثات کے زاویوں اور ضلعوں کی پیائش کیجیے۔ آپ ان مثلثات کے ضلعوں اور مقابل زاویوں کے درمیان آپ کس رشتہ کو اجاگر کر سکتے ہیں۔







اس طریقہ سے ہم ذیل کے مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.7 : کسی بھی مثلث میں بڑے زاویے کا مقابل ضلع ہمیشہ بڑا ہی ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے متضاد طریقہ بھی اپنایا جاسکتا ہے۔

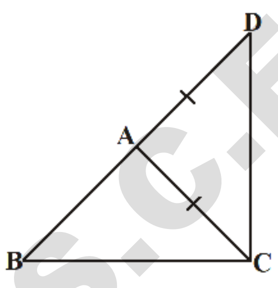
یہ کیجیے

مثلث ABC کھینچیے اور اس کے اضلاع کی پیائش کیجیے۔ $AB + BC$ ، $BC + AC$ اور $AC + AB$ کا مجموعہ معلوم کیجیے اور ان کا تقابل مثلث کے تیسرے ضلع کے طول سے کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ دیکھیں گے کہ $AB + BC > AC$ ، $BC + AC > AC$ اور $AC + AB > BC$

اس مشغلے کو چند مزید مثلثات کے ساتھ دہرائیے جس کے نتیجے میں آپ مسئلہ بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.8 : مثلث کے کوئی دو ضلعوں کا مجموعہ اس کے تیسرے ضلع سے زیادہ ہوتا ہے۔



متصلہ شکل میں مثلث ΔABC کے ضلع BA کو D تک کھینچا گیا اس طرح کہ $AD = AC$ پڑھیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہو کہ $\angle BCD > \angle BDC$ اور $BA + AC > BC$

کیا آپ مندرجہ بالا مسئلہ کا ثبوت دے سکتے ہیں۔

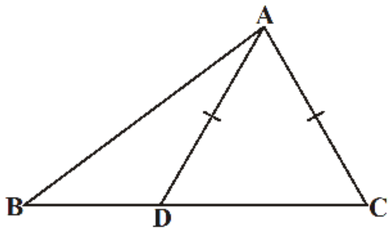
آیئے اب ہم اسی مسئلہ کے نتیجے پر مبنی مثالوں پر غور کریں۔

مثال (15) : مثلث ΔABC کے ضلع BC پر نقطہ D اس طرح ہے کہ $AD=AC$ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ $AB > AD$

حل : مثلث ΔDAC میں

$AD = AC$ (دیا گیا ہے)

اس طرح $\angle ADC=\angle ACD$ (مساوی ضلعوں کے مقابل زاویئے)



اب $\angle ADC$ مثلث ABD کا خارجی زاویہ ہے۔

So, $\angle ADC > \angle ABD$

or, $\angle ACD > \angle ABD$

or, $\angle ACB > \angle ABC$

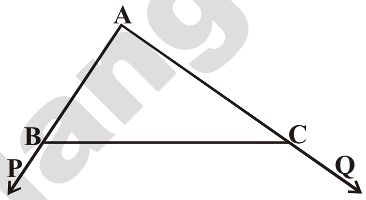
So, $AB > AC$ (Side opposite to larger angle in ΔABC)

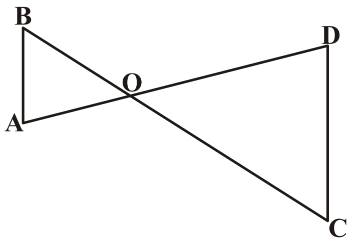
or, $AB > AD$ $(AD = AC)$

EXERCISE - 7.4

1. Show that in a right angled triangle, the hypotenuse is the longest side.

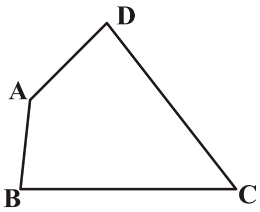
2. In adjacent figure, sides AB and AC of ΔABC are extended to points P and Q respectively.
Also, $\angle PBC < \angle QCB$. Show that $AC > AB$.

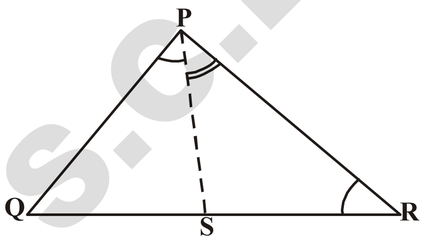




3. In adjacent figure, $\angle B < \angle A$ and $\angle C < \angle D$. Show that $AD < BC$.

4. AB and CD are respectively the smallest and longest sides of a quadrilateral ABCD (see adjacent figure).
Show that $\angle A > \angle C$ and $\angle B > \angle D$.





5. In adjacent figure, $PR > PQ$ and PS is a angle bisector of $\angle QPR$. Prove that $\angle PSR > \angle PSQ$.

6. If two sides of a triangle measure 4cm and 6cm find all possible measurements (positive Integers) of the third side. How many distinct triangles can be obtained?

7. Try to construct a triangle with 5cm, 8cm and 1cm. Is it possible or not? Why? Give your justification.

اس طرح $\angle ADC > \angle ABP$

یا $\angle ACD > \angle ABD$

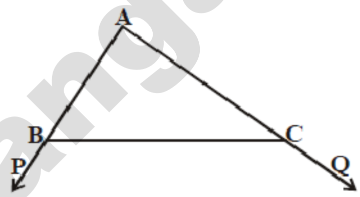
یا $\angle ACB > \angle ABC$

اس طرح $AB > AC$ (ΔABC میں بڑے زاویئے کے مقابل کا ضلع)

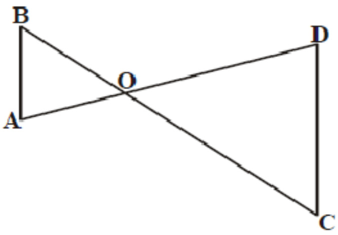
یا $AB > AD \ (AD = AC)$

مشق 7.4

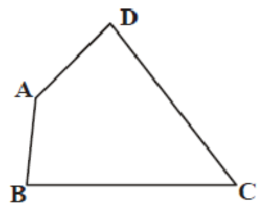
1. بتلائیے کہ قائم الزاویہ مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔



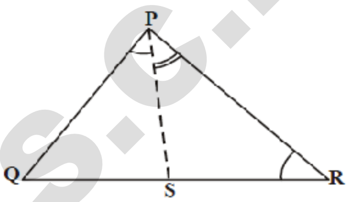
2. متصلہ شکل میں مثلث ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو نقاط P اور Q تک بڑھایا گیا ہے، اور $\angle PBC < \angle QCB$ بتلائیے کہ $AC > AB$



3. متصلہ شکل میں $\angle B < \angle A$ اور $\angle C < \angle D$
بتلائیے کہ $AD < BC$



4. ایک چار ضلعی ABCD میں AB اور CD ترتیب وار سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا ضلع ہے۔ (شکل دیکھئے)
بتلائیے کہ $\angle A > \angle C$ اور $\angle B > \angle D$



5. متصلہ شکل میں $PR > PQ$ اور PS، $\angle QPR$ کی تنصیف کرتا ہے
تب ثابت کیجیے کہ $\angle PSR > \angle PSQ$

6. اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کی پیمائش 4 سم اور 6 سم ہو تو اس کے تیسرے ضلع کی تمام ممکنہ پیمائشات (مثبت صحیح مدد) معلوم کیجیے اس طرح کہ کتنے مختلف مثلثات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

7. 5 سم، 8 سم اور 1 سم پیمائش کے مثلث بنانے کی کوشش کیجیے۔ کیا یہ ممکن ہے یا نہیں؟ کیوں؟ اپنے جواب کی تشریح کیجیے۔

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

D7R8F9

- Figures which are identical i.e. having same shape and size are called congruent figures.
- Three independent measurements are required to make a unique triangle.
- Two triangles are congruent if corresponding angles are congruent and corresponding sides are equal.
- Also, there is a one-one correspondence between the vertices.
- In Congruent triangles corresponding parts are equal and we write in short 'CPCT' for corresponding parts of congruent triangles.
- SAS congruence rule: Two triangles are congruent if two sides and the included angle of one triangle are equal to the corresponding two sides and the included angle of the other triangle.
- ASA congruence rule: Two triangles are congruent if two angles and the included side of one triangle are equal to two angles and the included side of other triangle.
- Angles opposite to equal sides of an isosceles triangle are equal.
- Conversely, sides opposite to equal angles of a triangle are equal.
- SSS congruence rule: If three sides of one triangle are equal to the three sides of another triangle, then the two triangles are congruent.
- RHS congruence rule: If in two right triangles the hypotenuse and one side of one triangle are equal to the hypotenuse and one side of the other triangle, then the two triangles are congruent.
- If two sides of a triangle are unequal, the angle opposite to the longer side is larger.
- In any triangle, the side opposite to the larger angle is longer.
- The sum of any two sides of a triangle is greater than the third side.
- Representation of Line, linesegment and ray

  LM = Length of Linesegment LM; $\overline{LM}$ = Line segment LM $\overrightarrow{LM}$ = Ray LM; $\overleftrightarrow{LM}$ = Line LM.

مشق 1.1

- اشکال جو یکساں ہوں یعنی ان کی شکل ایک جیسی ہو اور ان کی ہیئت بھی مساوی ہو متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔
- ایک منفرد مثلث کی بناوٹ کے لیے تین آزادانہ پیمائشات کی ضرورت ہوتی ہے
- دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر نظیری زاویے متماثل ہوں اور نظیری ضلعے مساوی ہوں
- متماثل مثلثات میں راسوں کے درمیان ایک تا ایک تعلق پایا جاتا ہے۔
- متماثل مثلثات میں متناظر حصّے مساوی ہوتے ہیں، جس کو ہم مختصراً CPCT کے تحت لکھتے ہیں۔
- SAS متماثلت کا اصول: ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان کے درمیان واقع ہونے والا زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر دو ضلعوں اور ان کے درمیان واقع ہونے والے زاویے کے مساوی ہو تو یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- ASA متماثلت کا اصول: ایک مثلث کے دو زاویئے اور اس کے درمیان واقع ہونے والا ضلع دوسرے مثلث کے متناظر دو زاویوں اور ان کے درمیان واقع ہونے والے ضلع کے مساوی ہو تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- مساوی الساقین مثلث کے مساوی ضلعوں کے مقابل زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔
- اسی طرح، مثلث میں مساوی زاویہ کے مقابل ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔
- SSS متماثلت کا اصول: اگر ایک مثلث کے تین ضلعوں کی پیائش دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کی پیائش کے مساوی ہو تب یہ دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- RHS متماثلت کا اصول: اگر ایک قائم الزاویہ مثلث میں وتر اور ایک ضلع دوسرے قائم الزاویہ مثلث کے متناظر وتر اور ایک ضلع کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- اگر مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوں تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ بڑا ہوتا ہے۔
- کسی بھی مثلث میں بڑے زاویئے کے مقابل کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔
- مثلث کے کوئی دو ضلعوں کے طول کا مجموعہ اس کے تیسرے ضلعے کے طول سے زیادہ ہوتا ہے۔
- خط مستقیم، خطی قطعہ اور شعاع کا اظہار

خطی قطعہ $= \overline{LM}$ ، خطی قطعہ LM کا طول $=$ LM

خط مستقیم LM $= \overleftrightarrow{LM}$ شعاع LM $= \overrightarrow{LM}$

Chapter

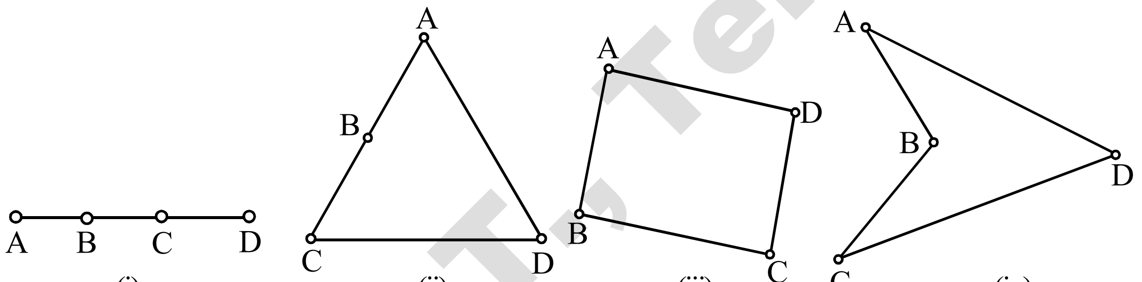
8

Quadrilaterals

N3N2N8

8.1 Introduction

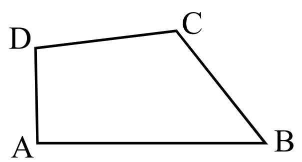
You have learnt some properties of triangles in the previous chapter with justification. You know that a triangle is a figure obtained by joining three non-collinear points in pairs. Do you know which figure you obtain with four points in a plane ? Note that if all the points are collinear, we obtain a line segment (Fig. (i)), if three out of four points are collinear, we get a triangle (Fig(ii)) and if any three points are not collinear, we obtain a closed figure with four sides (Fig (iii), (iv)), we call such a figure as a quadrilateral.



(i) (ii) (iii) (iv)

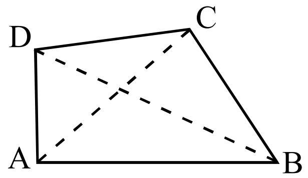
You can easily draw many more quadrilaterals and identify many around you. The Quadrilateral formed in Fig (iii) and (iv) are different in one important aspect. How are they different?

In this chapter we will study quadrilaterals only of type (Fig (iii)). These are convex quadrilaterals.



A quadrilateral is a simple closed figure bounded by four line segments in a plane.

The quadrilateral ABCD has four sides AB, BC, CD and DA, four vertices are A, B, C and D. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ and $\angle D$ are the four angles formed at the vertices.



When we join the opposite vertices A, C and B, D, then AC and BD are the two diagonals of the Quadrilateral ABCD.

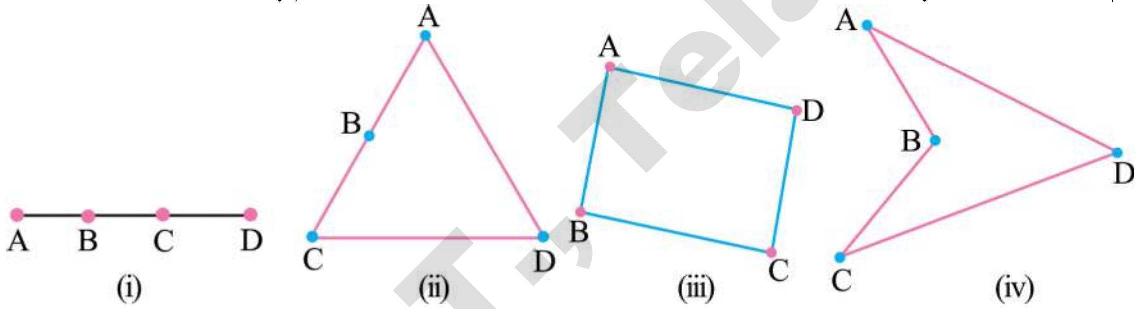
باب

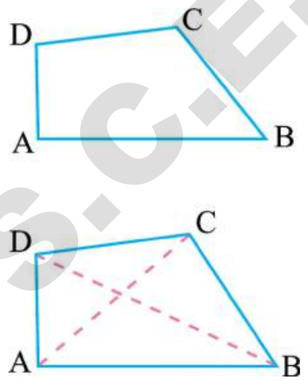
8

چارضلعی

8.1 تعارف

پچھلے باب میں آپ مثلثات کی چند خصوصیات سیکھ چکے ہیں' آپ یہ جانتے ہیں کہ مثلث وہ شکل ہے جو تین غیر ہم خط نقاط کے جوڑ سے بنتی ہے۔کیا آپ جانتے ہیں کہ ایک مستوی میں چار نقاط سے کونسی شکل حاصل ہوتی ہے؟ یہ ذہن نشین کیجیے کہ اگر تمام نقاط ہم خط ہوں تب ہمیں ایک خطی قطعہ حاصل ہوگا(شکل (i))چار میں سے تین نقاط ہم خط ہوں تب ہمیں مثلث حاصل ہوگا(شکل (ii))دیکھیے اور اگر کوئی تین نقاط ہم خط نہ ہوں تب ہمیں چار ضلعوں والی ایک بند شکل حاصل ہوگی(شکل (iii)،(iv))ایسی شکل کو ہم چار ضلعی کہتے ہیں۔





آپ بہ آسانی کئی اور چار ضلعی بنا سکتے ہیں' اور اپنے اطراف و اکناف میں کئی چار ضلعی کی شناخت کر سکتے ہیں۔شکل (iii) اور شکل (iv) میں بنائی گئی چار ضلعی ایک خاص پہلو کے لحاظ سے مختلف ہے۔یہ کس لحاظ سے مختلف ہے؟

ہم اس باب میں صرف شکل (iii) کی قسم کے چار ضلعی کا مطالعہ کریں گے' یہ تمام محدب چار ضلعی ہیں۔

ایک مستوی میں چار خطوط سے گھری ہوئی سادہ بند شکل چار ضلعی ہے۔

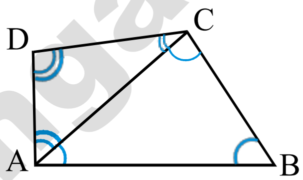
چار ضلعی ABCD کے چار ضلعے AB' BC' CD اور DA ہیں چار راس A' B' C اور D ہیں۔راسوں پر بننے والے چار زاویے $\angle A$' $\angle B$' $\angle C$ اور $\angle D$ ہیں۔

جب ہم مخالف راس (A,C) اور (B,D) کو شکل (vi) کے مطابق ملاتے ہیں AC اور BD چار ضلعی ABCD کے دوو تر کہلاتے ہیں۔

8.2 PROPERTIES OF A QUADRILATERAL

There are four angles in the interior of a quadrilateral. Can we find the sum of these four angles? Let us recall the angle sum property of a triangle. We can use this property in finding sum of four interior angles of a quadrilateral.

ABCD is a quadrilateral and AC is a diagonal (see figure).



We know the sum of the three angles of ΔABC is,

$\angle BAC + \angle B + \angle ACB = 180^o ...(1)$ (Angle sum property of a triangle)

Similarly, in ΔADC,

$$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ \qquad ...(2)$$

Adding (1) and (2), we get

$$\angle BAC + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^0 + 180^0$$

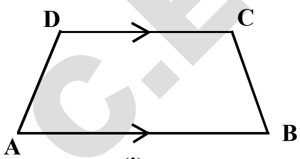
But $\angle BAC + \angle CAD = \angle A$ and $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

So, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

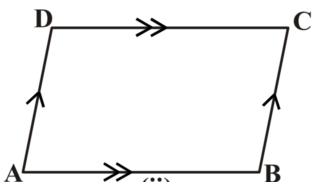
i.e the sum of four angles of a quadrilateral is 360° or 4 right angles.

8.3 DIFFERENT TYPES OF QUADRILATERALS

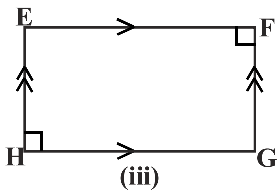
Look at the quadrilaterals drawn below. We have come across most of them earlier. We will quickly consider these and recall their specific names based on their properties.



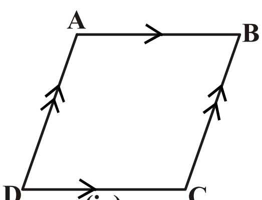
(i)



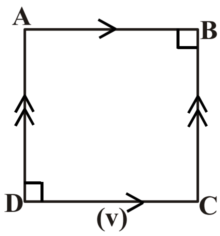
(ii)



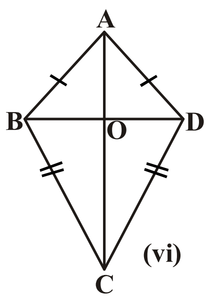
(iii)



(iv)



(v)



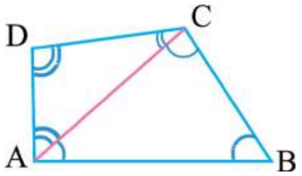
(vi)

8.2 چارضلعی کی خصوصیات

چارضلعی کے اندرونی چارزاویئے ہیں' کیا ہم ان چارزاویوں کا مجموعہ معلوم کرسکتے ہیں؟ آیئے ہم مثلث کے زاویوں کی خصوصیات کا اعادہ کریں گے' ہم ان خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے چارضلعی کے اندرون واقع چارزاویوں کا مجموعہ معلوم کرسکتے ہیں۔ ABCD ایک چارضلعی ہےاور AC اس کا ایک وتر ہے۔(شکل دیکھئے)

ہم جانتے ہیں کہ ΔABC کے تین زاویوں کا مجموعہ

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA = 180^\circ$ .... (1) (مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت)



اسی طرح ΔADC میں

$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ$ .... (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\angle CAB + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ + 180^\circ$$

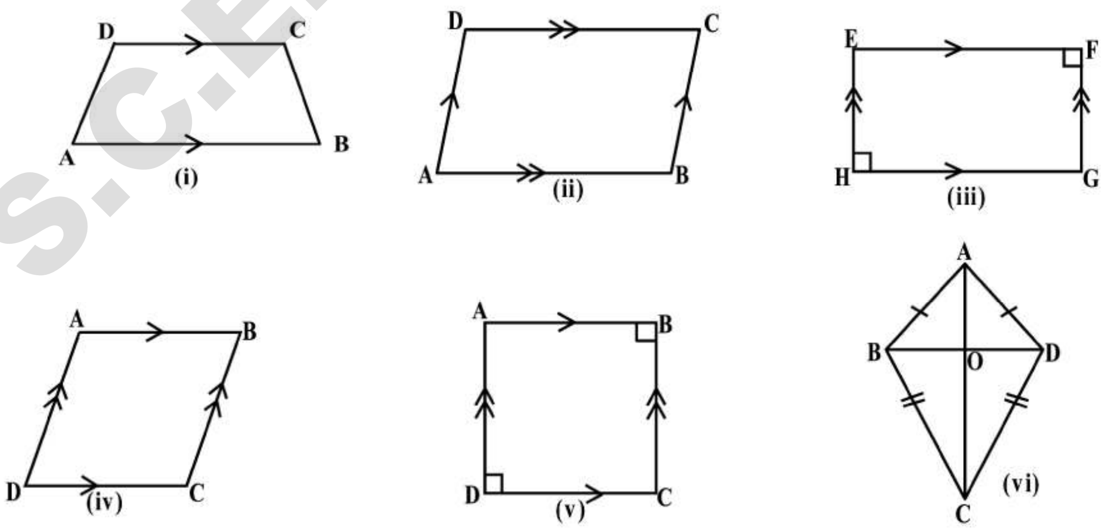
چونکہ $\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ اور $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

اس لیے $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

یعنی چارضلعی کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360^0 یا چار قائمہ ہوتا ہے۔

8.3 چارضلعی کی مختلف اقسام

حسب ذیل بنائی گئی چارضلعی کو دیکھئے' انہیں ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں' ہم ان کی خصوصیات کی بنیاد پر ان کے مخصوص ناموں کی شناخت کریں گے۔



We observe that

- In fig. (i) the quadrilateral ABCD had one pair of opposite sides AB and DC parallel to each other. Such a quadrilateral is called a **trapezium**.

  If in a trapezium non parallel sides are equal, then the trapezium is an **isosceles trapezium**.

- In fig. (ii) both pairs of opposite sides of the quadrilateral are parallel such a quadrilateral is called a **parallelogram**. Fig.(iii), (iv) and (v) are also parallelograms.
- In fig. (iii) parallelogram EFGH has all its angles as right angles and is called a **rectangle.**
- In fig. (iv) parallelogram has its adjacent sides equal and is called a **rhombus**.
- In fig. (v) parallelogram has its adjacent sides equal and angles of 90° this is called **a square**.
- The quadrilateral ABCD in fig.(vi) has the two pairs of adjacent sides equal, i.e. AB = AD and BC = CD. It is called **a kite**.

Consider what Nisha says:

A rhombus may or maynot be a square but all squares are rhombuses.

Lalita Adds

All rectangles are parallelograms but all parallelograms are not rectangles.

Which of these statements you agree with?

Give reasons for your answer. Write other such statements about different types of quadrilaterals.

Illustrative examples

Example-1 : ABCD is a parallelogram and $\angle A = 60^\circ$. Find the remaining angles.

Solution : The opposite angles of a parallelogram are equal.

So in a parallelogram ABCD

$\angle C = \angle A = 60^\circ$ and $\angle B = \angle D$

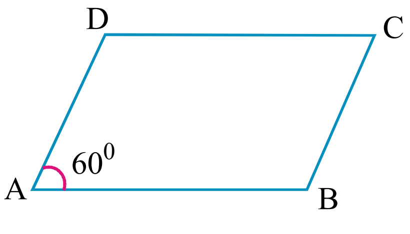
and the sum of adjacent angles of parallelogram is equal to 180°.

As $\angle A$ and $\angle B$ are adjacent angles

$\angle D = \angle B = 180^\circ - \angle A$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Thus the remaining angles are $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.



ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

- شکل (i) میں چارضلعی ABCD کے مقابل کے ضلعے کا ایک جوڑ AB اور DC ایکدوسرے سے متوازی ہیں۔ایسی چارضلعی منحرف کہلاتی ہے۔

اگرمنحرف میں غیرمتوازی ضلعے مساوی ہوں تب یہ منحرف مساوی الساقین منحرف ہوتا ہے۔

- شکل (ii) میں مقابل کے ضلعے کی دونوں جوڑیاں متوازی ہیں' ایسی چارضلعی متوازی الاضلاع کہلاتی ہے۔شکل (iii)' (iv) اور (v) بھی متوازی الاضلاع ہیں۔
- شکل (iii) میں متوازی الاضلاع EFGH کے تمام زاویے زاویہ قائمہ ہیں۔ یہ ایک مستطیل ہے۔
- شکل (iv) میں متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے مساوی ہیں یہ ایک معین کہلاتا ہے۔
- شکل (v) میں متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے مساوی ہیں اور ہر زاویہ 90^0 ہے مربع کہلاتا ہے۔
- چارضلعی ABCD شکل (vi) میں جس کے متصلہ ضلعوں کے دو جوڑ مساوی ہیں' یعنی AB = AD اور BC = CD یہ پتنگ کہلاتی ہے۔

غور کیجیے کہ نشاط کیا کہتی ہے

ایک معین' مربع ہوسکتا ہے' لیکن تمام مربعے' معین نہیں ہوسکتے' اس میں فرحین یہ اضافہ کرتی ہے۔

تمام مستطیل' متوازی الاضلاع ہوتے ہیں لیکن تمام متوازی الاضلاع مستطیل نہیں ہوتے۔

ان بیانات میں آپ کس بیان سے متفق ہیں۔

اپنے جواب کی وجوہات بیان کیجیے' چارضلعی کی مختلف اقسام سے متعلق اس طرح کے دوسرے اور بیانات لکھئے۔

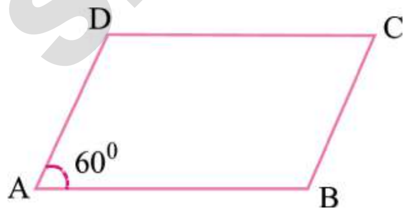
توضیحی مثالیں

مثال (1): ABCD ایک چارضلعی ہے' اور $\angle A = 60^\circ$ ہو تو بقیہ زاویے معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

اس لیے متوازی الاضلاع ABCD میں

$\angle C = \angle A = 60^\circ$ اور $\angle B = \angle D$



اور متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 کے مساوی ہوتا ہے۔

جیسا کہ $\angle A$ اور $\angle B$ متصلہ زاویے ہیں۔

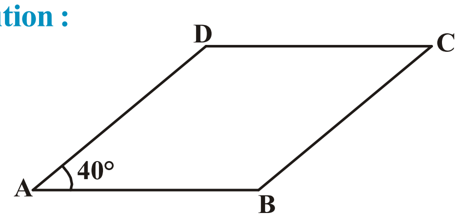
$\angle D = \angle B = 180^\circ - \angle A$

$= 180^\circ - \angle 60 = 120^\circ$

پس بقیہ زاویے 120^0' 60^0' 120^0 ہوں گے۔

Example-2. In a parallelogram ABCD, $\angle DAB = 40^o$ find the remaining angles of the parallelogram.

Solution :



ABCD is a parallelogram

$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ and AD || BC

As sum of consecutive angles

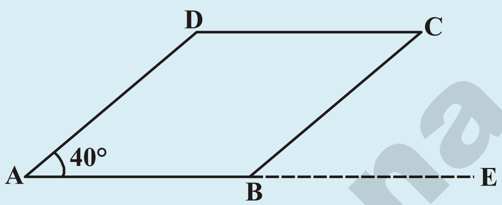
$\angle CBA + \angle DAB = 180°$

$\therefore \angle CBA = 180 - 40°$

$= 140°$

From this we can find $\angle ADC = 140°$ and $\angle BCD = 40°$

TRY THIS



Extend AB to E. Find $\angle CBE$. What do you notice? What kind of angles are $\angle ABC$ and $\angle CBE$?

Example-3 : Two adjacent sides of a parallelogram are 4.5 cm and 3 cm. Find its perimeter.

Solution : Since the opposite sides of a parallelogram are equal the other two sides are 4.5 cm and 3 cm.

Hence, the perimeter = 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15 cm.

Example-4 : In a parallelogram ABCD, the bisectors of the adjacent $\angle A$ and $\angle B$ intersect at P. Show that $\angle APB = 90^o$.

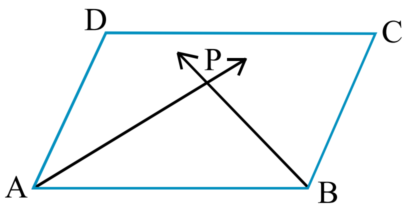
Solution : ABCD is a parallelogram $\overrightarrow{AP}$ and $\overrightarrow{BP}$ are bisectors of adjacent angles, $\angle A$ and $\angle B$.

As, the sum of adjacent angles of a parallelogram is supplementary.

$\angle A + \angle B = 180^o$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90°$



In Δ APB,

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180°$ (angle sum property of triangle)

$\angle APB = 180^0 - (\angle PAB + \angle PBA)$

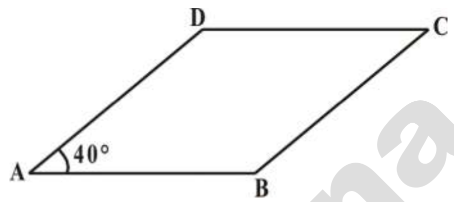
$= 180^o - 90^o$

$= 90^o$

Hence proved.

مثال (2) :ایک متوازی الاضلاع ABCD میں $\angle DAB = 40^\circ$ ہوتو متوازی الاضلاع کے دوسرے زاویے معلوم کیجیے۔

حل :



ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$\angle DAB = \angle BCD = 40^0$ اور $AD \parallel BC$

متصلہ زاویوں کا مجموعہ

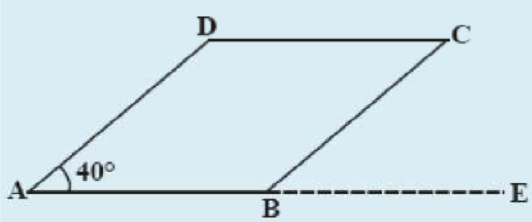
$\angle CBA + \angle DAB = 180^0$

$\therefore \angle CBA = 180^\circ - 40^\circ$

$= 140^0$

اس سے ہم $\angle ADE = 140^\circ$ اور $\angle BCD = 40^\circ$ بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے



AB کو E تک بڑھایئے (خارج کیجیے)

$\angle CBE$ معلوم کیجیے' آپ کیا غور کرتے ہیں۔

$\angle ABC$ اور $\angle CBE$ کس قسم کے زاویے ہیں۔

مثال (3) :ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع 4.5 سمر اور 3 سمر ہیں اس کا احاطہ معلوم کیجیے۔

حل :چونکہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں اس لیے اس کے دوسرے دو اضلاع 4.5 سمر اور 3 سمر ہوں گے۔

اس لیے احاطہ $= 3 + 4.5 + 3 + 4.5 = 15$ سمر

مثال (4) :ایک متوازی الاضلاع ABCD میں دو متصلہ زاویوں $\angle A$ اور $\angle B$ کے زاویٔ ناصف P پر قطع کرتے ہیں۔

بتلایئے کہ $\angle APB = 90^\circ$

حل : ABCD ایک متوازی اضلاع ہے۔ $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ متصلہ زاویے $\angle A$ اور $\angle B$ کے زاویٔ ناصف ہیں۔

جیسا کہ متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ تکمیلی ہوتا ہے۔

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

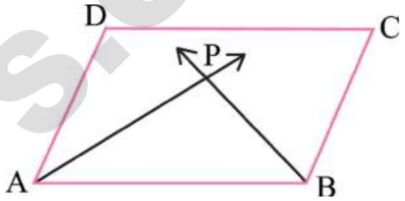
$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$$

ΔAPB میں

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ$$

(مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت)



$$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle PBA)$$

$$= 180^0 - 90^0$$

$$= 90^0$$

لہٰذا ثابت ہوا۔

EXERCISE - 8.1

1. State whether the statements are True or False.
   (i) Every parallelogram is a trapezium ( )
   (ii) All parallelograms are quadrilaterals ( )
   (iii) All trapeziums are parallelograms ( )
   (iv) A square is a rhombus ( )
   (v) Every rhombus is a square ( )
   (vi) All parallelograms are rectangles ( )

2. Complete the following table by writing (YES) if the property holds for the particular Quadrilateral and (NO) if property does not holds.

Properties	Trapezium	Parallelogram	Rhombus	Rectangle	Square
a. Only one pair of opposite sides are parallel	YES				
b. Two pairs of opposite sides are parallel					
c. Opposite sides are equal					
d. Opposite angles are equal					
e. Adjacent angles are supplementary					
f. Diagonals bisect each other					
g. Diagonals are equal					
h. All sides are equal					
i. Each angle is a right angle					
j. Diagonals are perpendicular to each other.					

3. ABCD is trapezium in which AB || CD. If AD = BC, show that $\angle A = \angle B$ and $\angle C = \angle D$.

4. The four angles of a quadrilateral are in the ratio 1 : 2:3:4. Find the measure of each angle of the quadrilateral.

5. ABCD is a rectangle AC is diagonal. Find the nature of ΔACD.

مشق 8.1

1. حسب ذیل بیانات صادق ہیں یا کاذب؟ بیان کیجیے۔

(i) ہر متوازی الاضلاع منحرف ہوتا ہے۔ (   ) (ii) تمام متوازی الاضلاع چار ضلعی ہوتے ہیں۔ (   )

(iii) تمام منحرف متوازی الاضلاع ہوتے ہیں۔ (   ) (iv) ایک مربع، معین ہوتا ہے۔ (   )

(v) ہر معین، مربع ہوتا ہے۔ (   ) (vi) تمام متوازی الاضلاع مستطیل ہوتے ہیں۔ (   )

2. حسب ذیل جدول میں دی گئی مخصوص چار ضلعی کی خاصیت اگر پائی جاتی ہو تب '' ہاں'' اور نا پائی جاتی ہے۔ تب ''نہیں'' لکھتے ہوئے مکمل کیجیے۔

خصوصیات	منحرف	متوازی الاضلاع	معین	مستطیل	مربع
a. مقابل کے ضلعوں کا صرف ایک جوڑ متوازی ہوتا ہے۔	ہاں				
b. مقابل کے ضلعوں کے دو جوڑ متوازی ہوتے ہیں۔					
c. مقابل کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔					
d. مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔					
e. متصلہ زاویے تکمیلی ہوتے ہیں۔					
f. وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔					
g. وتر مساوی ہوتے ہیں۔					
h. تمام ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔					
i. ہر زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔					
j. وتر ایک دوسرے پر عمودوار ہوتے ہیں۔					

3. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel CD$۔ اگر $AB = BC$ تب بتلائیے کہ $\angle A = \angle B$ اور $\angle C = \angle D$

4. ایک چار ضلعی کے چار زاویے $1:2:3:4$ کی نسبت میں ہیں چار ضلعی کے ہر زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

5. ABCD ایک مستطیل ہے۔ AC اس کا وتر ہے۔ ΔACD کے زاویے معلوم کیجیے۔ وجوہات بیان کیجیے۔

8.4 PARALLELOGRAM AND THEIR PROPERTIES

We have seen parallelograms are quadrilaterals. In the following we would consider the properties of parallelograms.

ACTIVITY

Cut-out a parallelogram from a sheet of paper again and cut along one of its diagonal. What kind of shapes you obtain? What can you say about these triangles?

Place one triangle over the other. Can you place each side over the other exactly. You may need to turn the triangle around to match sides. Since, the two traingles match exactly they are congruent to each other.

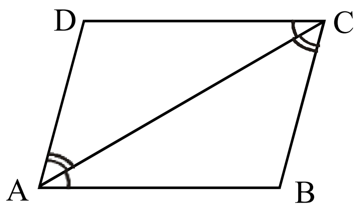
Do this with some more parallelograms. You can select any diagonal to cut along.

We see that each diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles.

Let us now prove this result.

Theorem- 8.1 : A diagonal of a parallelogram divides it into two congruent triangles.

Proof: Consider the parallelogram ABCD.



Join A and C. AC is a diagonal of the parallelogram.

Since AB || DC and AC is transversal

$\angle DCA = \angle CAB$. (Interior alternate angles)

Similarly DA || CB and AC is a transversal therefore $\angle DAC = \angle BCA$.

We have in ΔACD and ΔCAB

$\angle DCA = \angle CAB$ and $\angle DAC = \angle BCA$

also AC = CA. (Common side)

Therefore $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

This means that the two traingles are congruent by ASA rule (angle, side and angle). This means that diagonal AC divides the parallelogram in two congruent traingles.

8.4 متوازی الاضلاع اوراس کی خصوصیات

ہم دیکھ چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع چار ضلعی ہوتے ہیں' حسب ذیل میں ہم متوازی الاضلاع کی خصوصیات پرغور کریں گے۔

عملی کام

ایک کاغذ سے ایک متوازی الاضلاع تراشیئے بعدازاس کے وتر کے ساتھ مزید تراشیئے۔آپ کوکس قسم کی شکلیں حاصل ہوتی ہیں؟ آپ ان مثلثات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

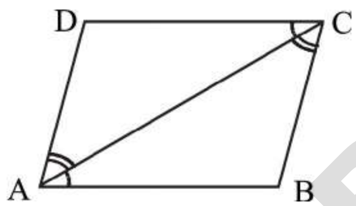
ایک مثلث پردوسرا مثلث رکھئے۔کیا آپ ہر ضلع پر دوسرے ضلع کو بالکل ایک دوسرے پر رکھ سکتے ہیں۔ممکن ہے کہ اضلاع میل کھانے کے لیے آپ کو مثلث کو اطراف سے گھمانے کی ضرورت پڑے گی چونکہ یہ دو مثلثات ایک دوسرے کو ڈھانک لیتے ہیں (ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں) اس لیے یہ ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

مزید چند متوازی الاضلاع کے ساتھ یہ عمل کیجئے' آپ اس کو تراشنے کے لیے کسی بھی وتر کا انتخاب کر سکتے ہیں۔

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے اب ہم اس نتیجہ کو ثابت کریں گے۔

مسئلہ 8.1 : متوازی الاضلاع کا ایک وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔



ثبوت : متوازی الاضلاع ABCD پرغور کیجیے۔

A اور C کوملایئے۔AC متوازی الاضلاع کا وتر ہے۔

چونکہ $DC \parallel AB$ اور AC قاطع خط ہے۔

$\angle DCA = \angle CAB$ (داخلی متبادلہ زاوایئے)

اسی طرح $DA \parallel CB$ اور AC قاطع خط ہے اس لیے

$\angle DAC = \angle BCA$ ہوتا ہے۔

اب ΔACD اور ΔCAB میں ہمیں

$\angle DCA = \angle CAB$ اور $\angle DAC = \angle BCA$

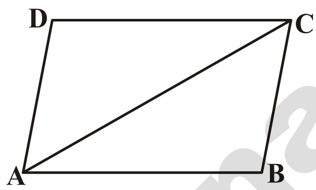
مزید $AC = CA$ (مشترک ضلع)

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

یعنی کے یہ دو مثلثات A.S.A (زاویہ' ضلع' زاویہ) اصول کے تحت متماثل ہیں۔اس کے یہ معنٰی ہیں کہ وتر AC متوازی الاضلاع کو دو متماثل حصّوں میں تقسیم کرتا ہے۔

Theorem-8.2 : In a parallelogram, opposite sides are equal and opposite angles are equal.

Proof: We have already proved that a diagonal of a parallelogram divides it into two congruent triangles.



Thus in figure $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

We have therefore $AB = DC$ and $\angle CBA = \angle ADC$

also $AD = BC$ and $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

i.e. $\angle DCB = \angle DAB$

From above in a parallelogram

i. The opposite sides are equal.

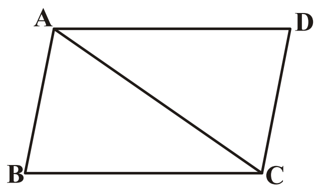
ii. The opposite angles are equal.

We have proved that in a convex quadrilateral if opposite sides are parallel then the opposite sides are equal and opposite angles are equal.

We will now try to prove its converse i.e. if the opposite sides of a quadrilateral are equal, then it is a parallelogram.

Theorem-8.3 : If each pair of opposite sides of a quadrilateral is equal, then it is a parallelogram.

Proof : Consider the quadrilateral ABCD with $AB = DC$ and $BC = AD$.



Draw a diagonal AC.

Consider ΔABC and ΔCDA

We have $BC = AD$, $AB = DC$ and $AC = CA$ (Common side)

So $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (why?)

Therefore $\angle BCA = \angle DAC$ with AC as transversal

$\therefore AB \parallel DC$ ...(1)

Since $\angle ACD = \angle CAB$ with CA as transversal

We have $BC \parallel AD$ ...(2)

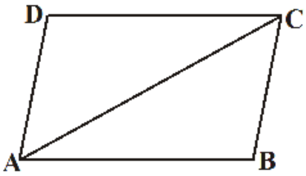
Therefore, ABCD is a parallelogram. By (1) and (2)

You have just seen that in a parallelogram both pairs of opposite sides are equal and conversely if both pairs of opposite sides of a quadrilateral are equal, then it is a parallelogram.

Can we show the same for a quadrilateral for which the pairs of opposite angles are equal?

مسئلہ 8.2 : متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا۔



پس شکل میں $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

چونکہ $AB = DC$ اور $\angle CBA = \angle ADC$

مزید $AD = BC$ اور $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

$\angle DCB = \angle DAB$

یعنی $\angle PAB = \angle DCB$

پس متوازی الاضلاع میں

(i) مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ محدب چار ضلعی میں اگر اس کے مقابل کے ضلع متوازی ہوں تب مقابل کے ضلع اور مقابل کے زاویے مساوی ہیں۔

اب ہم اس کے برعکس کو ثابت کرنے کی کوشش کریں گے۔ یعنی ''ایک چار ضلعی کے مقابل کے ضلعے مساوی ہوں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہے''۔

مسئلہ 8.3 : اگر ایک چار ضلعی میں مقابل کے ضلع کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

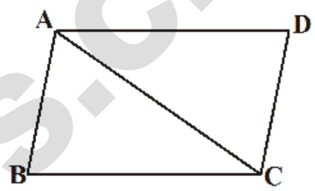
ثبوت : چار ضلعی ABCD میں $AB = DC$ اور $BC = AD$ پر غور کیجیے۔

ایک وتر AC کھینچیے۔

ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے $BC = AD$، $AB = DC$ اور $AC = CA$ (مشترک ضلع)

لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (کیوں؟)



لہٰذا $\angle BCA = \angle DAC$ قاطع خط AC کے ساتھ

یا $AB \parallel DC$ .... (1)

چونکہ $\angle ACD = \angle CAB$ قاطع خط CA کے ساتھ

ہمیں دیا گیا ہے $BC \parallel AD$ .... (2)

لہٰذا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے (1) اور (2) کی رو سے۔

آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے (ضلعوں) کے دو جوڑ مساوی ہوتے ہیں، اس کے برعکس اگر ایک چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع کے دو جوڑ مساوی ہوں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ کیا ہم یہی نتیجہ ''ایک چار ضلعی جس کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں'' کے لیے اخذ کر سکتے ہیں؟

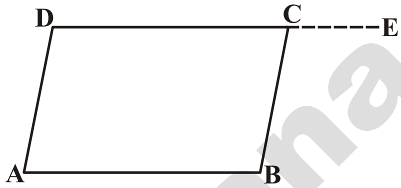
Theorem-8.4 : In a quadrilateral, if each pair of opposite angles are equal then it is a parallelogram.

Proof: In a quadrilateral ABCD, $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$ then we need to prove that ABCD is a parallelogram.

We know $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360°}{2}$$

i.e. $\angle A + \angle B = 180°$



Extend DC to E

$\angle BCD + \angle BCE = 180°$ hence $\angle BCE = \angle ADC$

If $\angle BCE = \angle ADC$ then AD || BC (Why?)

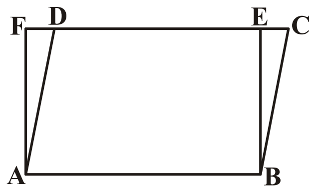
With DC as a transversal

We can similarly show AB || DC or ABCD is a parallelogram.

Exercise - 8.2

1. In the adjacent figure ABCD is a parallelogram and ABEF is a rectangle show that $\Delta AFD \cong \Delta BEC$.
2. Show that the diagonals of a rhombus divide it into four congruent triangles.
3. In a quadrilateral ABCD, the bisector of $\angle C$ and $\angle D$ intersect at O.

   Prove that $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$



8.5 Diagonals of a Parallelogram

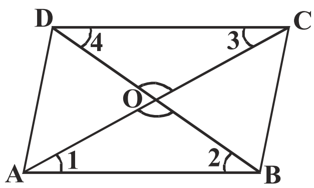
Theorem-8.5 : The diagonals of a parallelogram bisect each other.

Proof: Draw a parallelogram ABCD.

Draw both of its diagonals AC and BD their intersecting point is at 'O'.

In ΔOAB and ΔOCD

Mark the angles formed as $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$

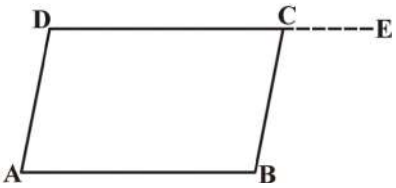


$\angle 1 = \angle 3$ (AB || CD and AC transversal)

$\angle 2 = \angle 4$ (Why) (Interior alternate angles)

مسئلہ 8.4 : ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے زاویوں کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

ثبوت : چار ضلعی ABCD میں $\angle A = \angle C$ اور $\angle B = \angle D$ دیا گیا ہے۔تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



ہم یہ جانتے ہیں $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360^o}{2}$$

یعنی $\angle A + \angle B = 180^0$

DC کو E تک بڑھایئے۔

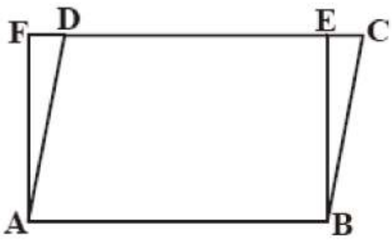
$\angle C + \angle BCE = 180^0$ لہٰذا $\angle BCE = \angle ADC$

اگر $\angle BCE = \angle D$ ہو تب $AD \parallel BC$ (کیوں؟)

DC بلحاظ قاطع خط کے

ہم اسی طرح یہ بتلا سکتے ہیں کہ $AB \parallel DC$ یا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مشق 8.2

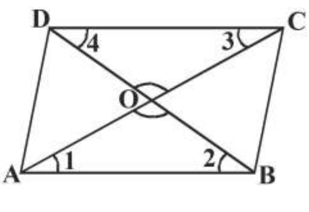


1. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ABEF ایک مستطیل ہے۔بتلایئے کہ $\Delta AFD \cong \Delta BEC$
2. بتلایئے کہ ایک معین کے وتر اس کو 4 متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔
3. ایک چار ضلعی ABCD میں $\angle C$ اور $\angle D$ کے زاوی ناصف 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ثابت کیجیے کہ $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

8.5 متوازی الاضلاع کے وتر

مسئلہ 8.5 : متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

ثبوت : ایک متوازی الاضلاع ABCD بنایئے۔



اسکے دو وتر AC اور BD کھینچیے تاکہ وہ نقطہ 'O' پر قطع کریں

ΔOAB اور ΔOCD میں

زاویے $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$ کی نشاندہی کیجیے۔

$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ اور AC قاطع خط ہے)

$\angle 2 = \angle 4$ (کیوں؟) (اندرونی متبادلہ زاویے)

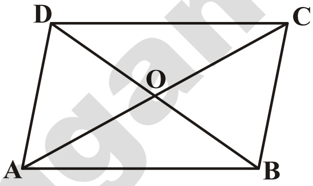
and $AB = CD$ (opposite sides of parallelogram)

By ASA rule

$\Delta OCD \cong \Delta OAB$

$CO = OA$, $DO = OB$ or diagonals bisect each other. (CPCT)

Hence we have to check if the converse is also true. Converse is if diagonals of a quadrilateral bisect each other then it is a parallelogram.



Theorem-8.6 : If the diagonals of a quadrilateral bisect each other then it is a parallelogram.

Proof: ABCD is a quadrilateral.

AC and BD are the diagonals intersecting at 'O',

such that $OA = OC$ and $OB = OD$.

Prove that ABCD is a parallelogram.

(**Note** : Consider ΔAOB and ΔCOD. Are these triangles congruent? If so how ABCD become a parallelogram?)

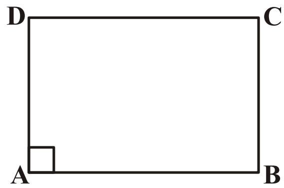
8.5.1 More geometrical statements

In the previous examples we have shown that starting from general statement we can make many statements about a particular figure(Parallelogram). We use previous results to deduce new statements. Note that these statements need not be verified by measurements as they have been proved logically.

Such statements that are deduced from the previously known and proved statements are called corollary. A corollary is a statement, the truth of which follows readily from an established theorem.

Corollary-1 : Show that each angle of a rectangle is a right angle.

Solution : Rectangle is a parallelogram in which one angle is a right angle.



ABCD is a rectangle. Let one angle is $\angle A = 90^{o}$

We have to show that $\angle B = \angle C = \angle D = 90^{o}$

Proof : Since ABCD is a parallelogram,

thus $AD \parallel BC$ and AB is a transversal

so $\angle A + \angle B = 180^{o}$ (Interior angles on the same side of a transversal)

as $\angle A = 90^{o}$ (given)

$\therefore \angle B = 180^{o} - \angle A$

$= 180^{o} - 90^{o} = 90^{o}$

Now $\angle C = \angle A$ and $\angle D = \angle B$ (opposite angles of parallelogram)

So $\angle C = 90^{o}$ and $\angle D = 90^{o}$.

Therefore each angle of a rectangle is a right angle.

اور $AB = CD$ (متوازی الاضلاع کی خاصیت)

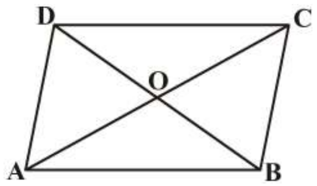
متماثلت $A.S.A$ اصول سے $\Delta OAB \cong \Delta OCD$

اس لیئے $CO = OA$، $DO = OB$ یا وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔(CPCT)

اس طرح ہمیں یہ جانچ کرنا ہوگا کہ کیا اس کا برعکس بھی صادق ہے۔

اس کا برعکس، اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب یہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

مسئلہ 8.6 : اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔



ثبوت : ABCD ایک چار ضلعی ہے۔

AC اور BD وتر ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔

اس طرح کہ $OA = OC$ اور $OB = OD$

ثابت کرنا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(اشارہ : ΔAOB اور ΔCOD پر غور کیجیے۔کیا یہ متماثل ہیں؟ اگر وہ متماثل ہیں تو ABCD کیسے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے؟)

8.5.1 مزید جیومٹریہ بیانات

سابقہ مثالوں میں ہم یہ بتا چکے ہیں کہ چند عام اصولوں کے ذریعہ کئی بیانات معلوم کر سکتے ہیں۔ جو کسی مخصوص شکل کے متعلق بنائے جاسکتے ہیں، ہم سابقہ نتائج کو نئے بیانات اخذ کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں (یہ بات ذہن نشین رکھیں گے) خیال رہے کہ ان بیانات کی کسی پیائش کے ذریعہ تصدیق کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی، یہ تمام صورتوں میں صادق ثابت کیے جا چکے ہیں۔

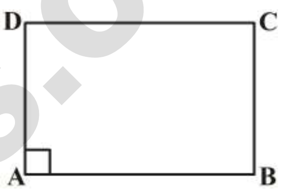
ایسے بیانات جو کہ سابقہ واقف شدہ بیانات سے اخذ کیے گئے ہوں ضمنی نتیجہ (Corollary) کہلاتے ہیں۔ضمنی نتیجہ ایک ایسا بیان ہے جس کی صداقت ثابت کردہ مسئلہ کے حوالہ سے ہوتی ہے۔

ضمنی نتیجہ (1) : بتلایئے کہ مستطیل کا ہر زاویہ ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

حل : مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویۂ زاویہ قائمہ ہے۔

ہمیں دیا گیا ہے کہ : ABCD ایک مستطیل ہے، فرض کرو کہ زاویہ $\angle A = 90^0$ ہے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ : $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$



ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

پس $AD \parallel BC$ اور AB ایک قاطع خط ہے۔

اس لیے $\angle A + \angle B = 180^0$

(قاطع خط کے ایک ہی جانب یعنی ضلع پر کے داخلی زاویئے)

جیسا کہ $\angle A = 90^0$ (دیا گیا ہے)

$\therefore \angle B = 180^0 - \angle A$

$= 180^0 - 90^0 = 90^0$

اب $\angle C = \angle A$ اور $\angle D = \angle B$ (متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے)

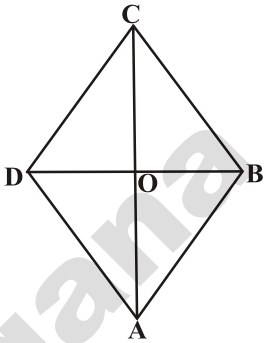
اس لیے $\angle C = 90^0$ اور $\angle D = 90^0$ لہٰذا مستطیل کا ہر زاویۂ زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

Corollary-2 : Show that the diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.

Proof : A rhombus is a parallelogram with all sides equal.

ABCD is a rhombus, diagonals AC and BD intersect at O

We want to show that AC is perpendicular to BD



Consider ΔAOB and ΔBOC

$OA = OC$ (Diagonals of a parallelogram bisect each other)

$OB = OB$ (common side to ΔAOB and ΔBOC)

$AB = BC$ (sides of rhombus)

Therefore $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (S.S.S rule)

So $\angle AOB = \angle BOC$

But $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (Linear pair)

Therefore $2\angle AOB = 180^\circ$

or $\angle AOB = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Similarly $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ (Same angle)

Hence AC is perpendicular on BD

So, the diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.

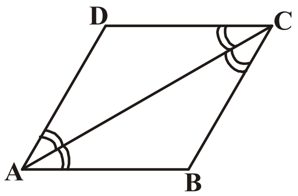
Corollary-3 : In a parallelogram ABCD, if the diagonal AC bisects the angle $\angle A$, then ABCD is a rhombus.

Proof : ABCD is a parallelogram

Therefore $AB \parallel DC$. AC is the transversal intersects $\angle A$ and $\angle C$

So, $\angle BAC = \angle DCA$ (Interior alternate angles) ...(1)

$\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)



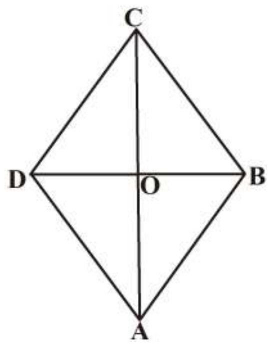
But it is given that AC bisects $\angle A$

So $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

Thus AC bisects $\angle C$ also

ضمنی نتیجہ (2) : بتلائیے کہ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمودوار ہوتے ہیں۔



ثبوت : معین ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔

ABCD ایک معین ہے، وتر AC اور BD، 'O' پر قطع کرتے ہیں۔

ہم یہ بتلانا چاہتے ہیں کہ AC عمودوار ہے BD پر

ΔAOB اور ΔBOC پر غور کیجیے۔

$OA = OC$ (متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

$OB = OB$ (مثلثات AOB اور BOC کا مشترک ضلع)

$AB = BC$ (معین کے اضلاع)

لہٰذا $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (ضلع، ضلع ضلع اصول)

اس لیے $\angle AOB = \angle BOC$

لیکن $\angle AOB + \angle BOC = 180^0$ (خطی جوڑ)

اس لیے $2\angle AOB = 180^0$

یا $\angle AOB = \frac{180^o}{2} = 90^o$

اسی طرح $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$ (مساوی زاویے)

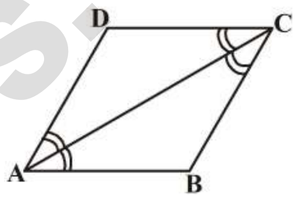
اس لیے AC عمودوار ہے BD پر

اس لیے معین کے وتر ایک دوسرے پر عمودوار ہوتے ہیں۔

ضمنی نتیجہ (3) : متوازی الاضلاع ABCD میں اگر وتر AC زاویہ A کی تنصیف کرتا ہے تب ABCD ایک معین ہے۔

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

لہٰذا $AB \parallel DC$، AC ایک قاطع خط ہے جو $\angle A$ اور $\angle C$ کو قطع کرتا ہے۔



اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$ (داخلی متبادل زاویہ) .... (1)

$\angle BCA = \angle DAC$ .... (2)

لیکن یہ دیا گیا ہے کہ AC، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

اس لیے $\angle BOC = \angle DAC$ $\therefore$

$\angle DCA = \angle DAC$ .... (3)

پس AC، $\angle C$ کی بھی تنصیف کرتا ہے۔

From (1), (2) and (3), we have

$\angle BAC = \angle BCA$

In ΔABC, $\angle BAC = \angle BCA$ means that $BC = AB$ (isosceles triangle)

But $AB = DC$ and $BC = AD$ (opposite sides of the parallelogram ABCD)

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

Hence, ABCD is a rhombus.

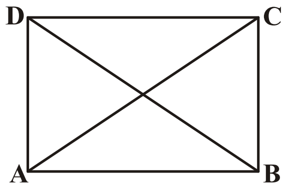
Corollary-4 : Show that the diagonals of a rectangle are of equal length.

Proof : ABCD is a rectangle and AC and BD are its diagonals

We want to show $AC = BD$

ABCD is a rectangle, means ABCD is a parallelogram with all its angles equal to right angle.

Consider the triangles ΔABC and ΔBAD,



$AB = BA$ (Common)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (Each angle of rectangle)

$BC = AD$ (opposite sides of the rectangle)

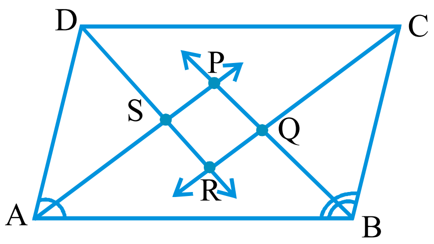
Therefore, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (S.A.S rule)

This implies that $AC = BD$

or the diagonals of a rectangle are equal.

Corollary-5 : Show that the angle bisectors of a parallelogram form a rectangle.

Proof : ABCD is a parallelogram. The bisectors of angles $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ and $\angle D$ intersect at P, Q, R, S to form a quadrilateral. (See adjacent figure)



Since ABCD is a parallelogram, $AD \parallel BC$. Consider AB as transversal intersecting them then $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ (Consecutive angles of Parallelogram)

We know $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ and $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC$ [Since $\overrightarrow{AP}$ and $\overrightarrow{BP}$ are the bisectors of $\angle A$ and $\angle B$ respectively]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\times 180^o$$

Or $\angle BAP + \angle ABP = 90^o$ ...(1)

(1) اور (2)(3) کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC میں $\angle BCA = \angle BCA$ کا مطلب یہ ہے کہ $BC = AB$ (مساوی الساقین مثلث)

لیکن $AB = DC$ اور $BC = AD$ (متوازی الاضلاع ABCD کے مقابل کے ضلع)

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

اس لیے ABCD ایک معین ہے۔

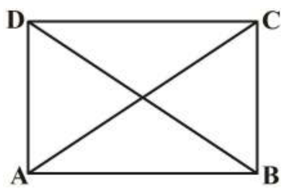
ضمی نتیجہ (4) : بتلایئے کے مستطیل کے وتر طول میں مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ABCD ایک مستطیل ہے' اور AC اور BD اس کے وتر ہیں۔

ہم یہ جاننا چاہتے ہے کہ $AC = BD$

ABCD ایک مستطیل ہے یعنی ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام زاویے زاویہ قائمہ ہیں۔

ΔABC اور ΔBAD پر غور کیجیے۔



$AB = BA$ (مشترک)

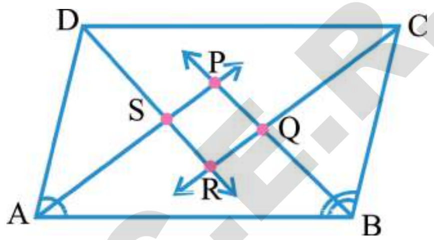
$\angle B = \angle A = 90^0$ (مستطیل کا ہر زاویہ)

$BC = AD$ (مستطیل کے مقابل کے زاویئے)

لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ضلع' زاویہ ضلع اصول)

یہ دلالت کرتا ہے کہ $AC = BD$

یا مستطیل میں وتر کے طول میں مساوی ہوتے ہیں۔



ضمی نتیجہ (5) : ایک متوازی الاضلاع کے زاوی ناصف ایک مستطیل بناتے ہیں۔

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے' زاویئے $\angle A$' $\angle B$' $\angle C$

اور $\angle D$ کے زاوی ناصف P' Q' R' S پر قطع کرتے ہوئے

ایک چار ضلعی بناتے ہیں۔ (متصلہ شکل دیکھئے)

چونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے $AD \parallel BC$

قاطع خط AB پر غور کیجیے جو کہ ان کو قطع کرتا ہے' تب $\angle PAB + \angle ABC = 180^0$ (متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویئے)

ہم جانتے ہیں کہ $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ اور $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC$ (چونکہ $\overrightarrow{AP}$ اور $\overrightarrow{BP}$ بالترتیب $\angle A$ اور $\angle B$ کا زاوئی ناصف ہے)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\times 180^0$$

یا $\angle BAP + \angle ABP = 90^0$ .... (1)

But In ΔAPB,

$$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^\circ \text{ (Angle sum property of the triangle)}$$

So $\angle APB = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^\circ - 90^\circ$ (From (1))

$= 90^\circ$

We can see that $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$

Similarly, we can show that $\angle CRD = \angle QRS = 90^\circ$ (Same angle)

But $\angle BQC = \angle PQR$ and $\angle DSA = \angle PSR$ (Why?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^\circ$

Hence PQRS has all the four angles equal to 90°.

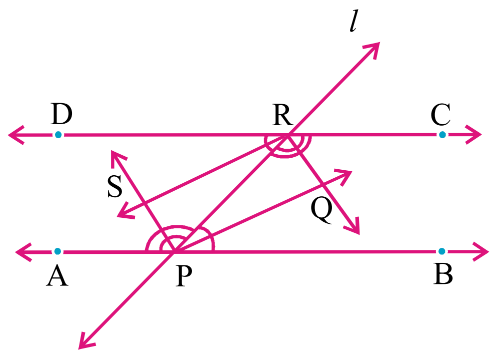
We can therefore say PQRS is a rectangle.

Think, discuss and write

1. Show that the diagonals of a square are equal and **right bisectors** of each other.
2. Show that the diagonals of a rhombus divide it into four congruent triangles.

Some Illustrative examples

Example-5. $\overleftrightarrow{AB}$ and $\overleftrightarrow{DC}$ are two parallel lines and a transversal l, intersects $\overleftrightarrow{AB}$ at P and $\overleftrightarrow{DC}$ at R. Prove that the bisectors of the interior angles form a rectangle.



Proof : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, l is the transversal intersecting $\overleftrightarrow{AB}$ at P and $\overleftrightarrow{DC}$ at R respectively.

Let $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RS}$ and $\overrightarrow{PS}$ are the bisectors of $\angle RPB$, $\angle CRP$, $\angle DRP$ and $\angle APR$ respectively.

$\angle BPR = \angle DRP$ (Interior Alternate angles) ...(1)

But $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\because \overrightarrow{PQ}$ is the bisector of $\angle BPR$)

also $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\because \overrightarrow{RS}$ is the bisector of $\angle DPR$). ...(2)

لیکن ΔAPB میں

$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ)

اس لیے $\angle APB = 180^0 - (\angle BAP + \angle ABP)$

دلالت کرتا ہے کہ $\angle APB = 180 - 90^0$ .... (1) سے

$= 90^0$

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle SPQ = \angle APB = 90^0$

اسی طرح ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ $\angle CRD = \angle QRS = 90^0$ (مساوی زاویہ)

لیکن $\angle BQC = \angle PQR$ اور $\angle DSA = \angle PSR$ (کیوں؟)

$\therefore\ \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^0$

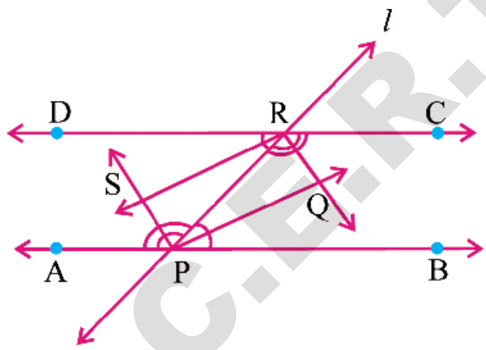
اس لیے PQRS کے چاروں زاویے 90^0 کے مساوی ہوتے ہیں۔

لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ PQRS ایک مستطیل ہے۔

سوچیے، تبادلہ خیال کیجیے اور لکھیے

1. بتلائیے کہ ایک مربع کے وتر مساوی ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
2. بتلائیے کہ ایک معین کے وتر اس کو چار متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔

چند توضیحی مثالیں



مثال (5): $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{DC}$ دو متوازی خطوط ہیں اور قاطع خط 'l' $\overleftrightarrow{AB}$ کو P پر اور $\overleftrightarrow{DC}$ کو R پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ داخلی زاویوں کے زاوی ناصف ایک مستطیل بناتے ہیں۔

ثبوت : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ ، l ایک قاطع خط ہے جو بالترتیب $\overleftrightarrow{AB}$ کو P پر اور $\overleftrightarrow{DC}$ کو R پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $\overrightarrow{PQ}$ ، $\overrightarrow{RQ}$ ، $\overrightarrow{RS}$ اور $\overrightarrow{PS}$ بالترتیب $\angle RPB$ ، $\angle CRP$ ، $\angle PRP$ اور $\angle APR$ کے زاوی ناصف ہیں۔

$\angle BPR = \angle DRP$ (داخلی متبادلہ زاویے) .... (1)

لیکن $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$

($\because$ $\overrightarrow{PQ}$ زاویہ $\angle BPR$ کا زاویہ ناصف ہے)

اور $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$

($\because$ $\overrightarrow{RS}$ زاویہ $\angle DPQ$ کا زاویہ ناصف ہے) .... (2)

From (1) and (2)

$\angle RPQ = \angle PRS$

These are interior alternate angles made by $\overline{PR}$ with the lines $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{RS}$

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

Similarly

$\angle PRQ = \angle RPS$, hence $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

Therefore PQRS is a parallelogram ... (3)

We have $\angle BPR + \angle CRP = 180^o$ (interior angles on the same side of the transversal l with line $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$)

$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^o$

$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^o$

But in ΔPQR,

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^o$ (three angles of a triangle)

$\angle PQR = 180^o - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

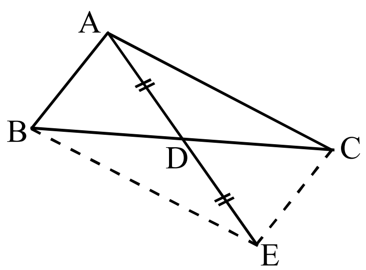
$= 180^o - 90^o = 90^o$ ... (4)

From (3) and (4)

PQRS is a parallelogram with one of its angles as a right angle.

Hence PQRS is a rectangle

Example-6. In a triangle ABC, AD is the median drawn on the side BC is produced to E such that AD = ED prove that ABEC is a parallelogram.



Proof : AD is the median of ΔABC

Produce AD to E such that AD = ED

Join BE and CE.

Now In Δ^s ABD and ECD

BD = DC (D is the midpoints of BC)

$\angle ADB = \angle EDC$ (vertically opposite angles)

AD = ED (Given)

So $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (SAS rule)

Therefore, AB = CE (CPCT)

also $\angle ABD = \angle ECD$

These are interior alternate angles made by the transversal $\overleftrightarrow{BC}$ with lines $\overleftrightarrow{AB}$ and $\overleftrightarrow{CE}$.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

(1) اور (2) کی روسے

$\angle RPQ = \angle PRS$

یہ داخلی متبادل زاویے ہیں جو $\overleftrightarrow{PR}$ اور خطوط $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ سے بنتے ہیں۔

$\therefore \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$

اسی طرح

$\angle PRQ = \angle RPS$ اس لیے $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{RQ}$

لہٰذا PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ .... (3)

ہمیں دیا گیا ہے $\angle BPR + \angle CRP = 180^\circ$

(قاطع خط کے ایک ہی جانب کے داخلی زاویے جو خطوط $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ سے بنتے ہیں)

$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^\circ$

لیکن ΔPQR میں

$\angle RPQ + \angle PRQ + \angle PRQ = 180^\circ$ (مثلث کے تین زاویے)

$\angle PQR = 180^\circ - (\angle RRQ + \angle PRQ)$

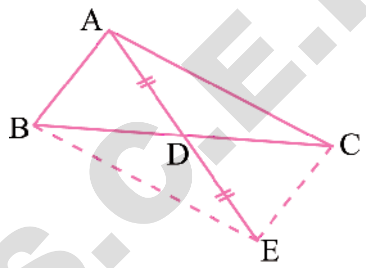
$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .... (4)

(3) اور (4) کی روسے

PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے زاویوں میں ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اس لیے PQRS ایک مستطیل ہے۔

مثال (6): مثلث ABC میں AD، BC پر بڑھایا گیا وسطانیہ ہے جس کو E تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ AD = ED۔ ثابت کیجیے کہ ABEC ایک متوازی الاضلاع ہے۔



ثبوت: AD، ΔABC کا وسطانیہ ہے۔

AD کو E تک اس طرح بڑھایا گیا کہ AD = ED

BE اور CE کو ملایئے۔

اب مثلثات ABD اور ECD میں

BD = DC ('D' BC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle ADB = \angle EDC$ (مقابل کے زاویے)

AD = ED (دیا گیا ہے)

اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (ضلع، زاویہ، ضلع)

لہٰذا AB = CE (CPCT)

اور $\angle ABD = \angle ECD$

یہ داخلی متبادل زاویے ہیں جو قاطع خط $\overleftrightarrow{BC}$ اور خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CE}$ سے ملکر بنتے ہیں۔

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

Thus, in a Quadrilateral ABEC,

AB || CE and AB = CE

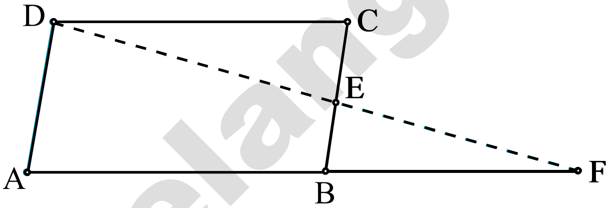
Hence ABEC is a parallelogram.

EXERCISE - 8.3

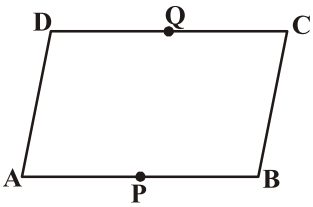
1. The opposite angles of a parallelogram are $(3x - 2)^o$ and $(x + 48)^o$.
   Find the measure of each angle of the parallelogram.

2. Find the measure of all the angles of a parallelogram, if one angle is 24^o less than the twice of the smallest angle.

3. In the adjacent figure ABCD is a parallelogram and E is the midpoint of the side BC. If AB and DE are produced to meet at F, show that AF = 2AB.



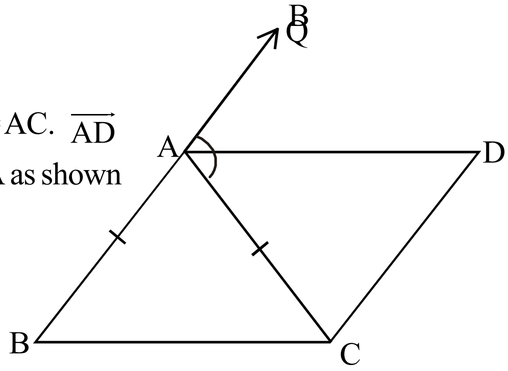
4. In the adjacent figure ABCD is a parallelogram P and Q are the midpoints of sides AB and DC respectively. Show that PBCQ is also a parallelogram.



5. ABC is an isosceles triangle in which AB = AC. $\overrightarrow{AD}$ bisects exterior angle $\angle QAC$ and CD || BA as shown in the figure. Show that

   (i) $\angle DAC = \angle BCA$

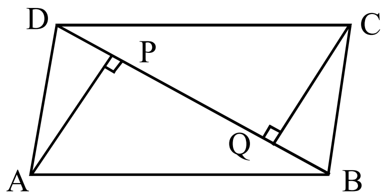
   (ii) ABCD is a parallelogram



6. ABCD is a parallelogram AP and CQ are perpendiculars drawn from vertices A and C on diagonal BD (see figure) show that

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) AP = CQ



اس طرح چار ضلعی ABEC میں

AB || CE اور AB = CE

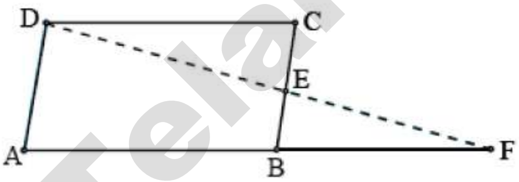
اس لیے ABEC ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مشق 1.1

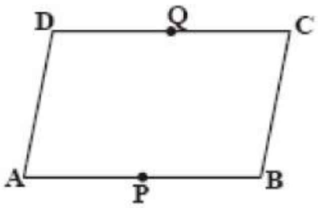
1. ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے $(3x-2)^0$ اور $(x+48)^0$ ہیں۔ متوازی الاضلاع کے دوسرے زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

2. ایک متوازی الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے اگر اس کا ایک زاویہ اس کے سب سے چھوٹے زاویے کے دوگنا سے 24^0 کم ہے۔

3. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور 'E' ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔ اگر DE اور AB بڑھانے پر وہ 'F' پر ملتے ہیں تب بتلائیے کہ AF = 2AB



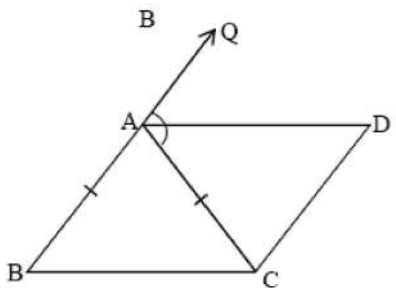
4. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے P، Q بالترتیب AB اور DC کے وسطی نقاط ہیں۔ بتلائیے کہ PBCQ بھی ایک متوازی الاضلاع ہے۔



5. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB = AC، AD خارجی زاوئی QAC کی تنصیف کرتا ہے اور CD || BA جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ بتلائیے کہ

(i) $\angle DAC = \angle BCA$

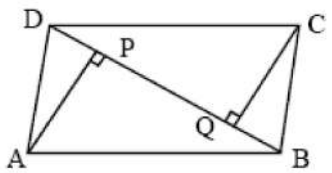
(ii) ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



6. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AP اور CQ راس A اور C سے وتر BD پر گرائے گئے عمود ہیں۔ (شکل دیکھئے) بتلائیے کہ

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQP$

(ii) AP = CQ



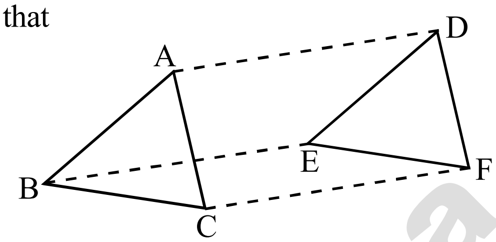
7. In Δ^s ABC and DEF, AB || DE; BC = EF and BC || EF. Vertices A, B and C are joined to vertices D, E and F respectively (see figure). Show that

   (i) ABED is a parallelogram

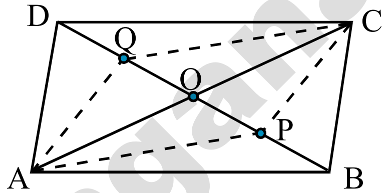
   (ii) BCFE is a parallelogram

   (iii) AC = DF

   (iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



8. ABCD is a parallelogram. AC and BD are the diagonals intersect at O. P and Q are the points of tri section of the diagonal BD. Prove that CQ || AP and also AC bisects PQ (see figure).



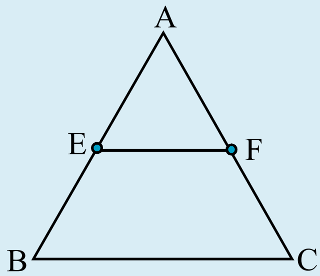
9. ABCD is a square. E, F, G and H are the mid points of AB, BC, CD and DA respectively. Such that AE = BF = CG = DH. Prove that EFGH is a square.

8.6 THE MIDPOINT THEOREM OF TRIANGLE

We have studied properties of triangle and of a quadrilateral. Let us try and consider the midpoints of the sides of a triangle and what can be derived from them.

TRY THIS

Draw a triangle ABC and mark the midpoints E and F of two sides of triangle. $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ respectively. Join the point E and F as shown in the figure.



Measure EF and the third side BC of the triangle. Also measure $\angle AEF$ and $\angle ABC$.

We find $\angle AEF = \angle ABC$ and $EF = \frac{1}{2} BC$

As these are corresponding angles made by the transversal AB with lines EF and BC, we say EF || BC.

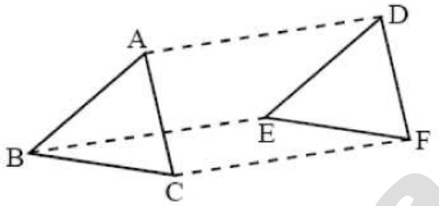
Repeat this activity with some more triangles.

So, we arrive at the following theorem.

Theorem-8.7 : The line segment joining the midpoints of two sides of a triangle is parallel to the third side and also half of it.

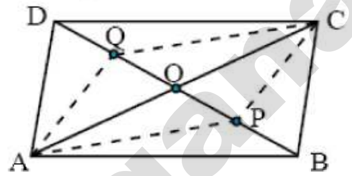
Given : ABC is a triangle with E and F as the midpoints of AB and AC respectively.

7. مثلثات ABC اور DEF میں AB // DE، BC = EF اور EF ‖ BC۔راس A، B اور C کوراس D، E اور F سے ملایا گیا۔(شکل دیکھئے)بتلائیے کہ



(i) ABED ایک متوازی الاضلاع ہے۔
(ii) BCFE ایک متوازی الاضلاع ہے۔
(iii) AC = DF (iv) ΔABC ≅ ΔDEF

8. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔AC اور BD وتر ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔P اور Q وتر BD کے نقاط تثلیث ہیں۔ثابت کیجیے کہ CQ ‖ AP اور یہ بھی ثابت کیجیے کہ AC تنصیف کرتا ہے PQ کی۔(شکل دیکھئے)



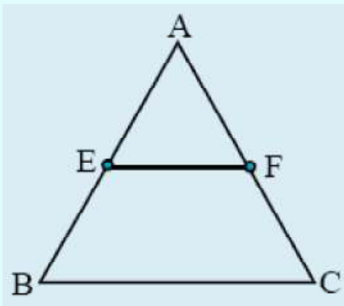
9. ABCD ایک مربع ہے E، F، G اور H ترتیب وار AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط ہیں اس طرح کے AE=BF=CG=DH ہوتب بتلائیے کہ EFGH ایک مربع ہے۔

8.6 مثلث کے وسطی نقطہ کا مسئلہ

ہم مثلث اور چار ضلعی کی خصوصیات کا مطالعہ کر چکے ہیں۔آیئے ہم یہ کوشش کریں گے کہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط پر غور کریں گے اوران سے ہم کیا اخذ کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

ایک مثلث ABC بنایئے اوراس کے دواضلاع AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب E اور F کی نشاندہی کیجیے۔نقاط E اور F کوملایئے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔



EF اور مثلث کے تیسرا ضلع BC کی پیمائش کیجیے۔اور ∠AEF اور ∠ABC کی بھی پیمائش کیجیے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ∠AEF = ∠ABC اور $EF = \frac{1}{2} BC$

یہ قاطع خط AB، اور خطوط EF اور BC سے بنے ہوئے متناظر زاویئے ہیں۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ EF ‖ BC۔

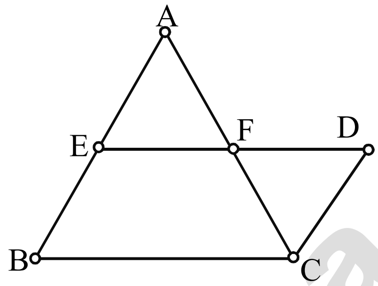
اس مشغلہ کو مزید چند مثلثات کے ساتھ دہرایئے۔

اس لیے ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں

مسئلہ 8.7 : ایک مثلث کے دواضلاع کے وسطی نقاط کوملانے والا خطی قطعہ تیسرے ضلع کے متوازی اوراس کا نصف ہوتا ہے۔

دیا گیا ہے : ABC ایک مثلث ہے جس میں E اور F بالترتیب AB اور AC کے وسطی نقاط ہیں۔

R.T.P : (i) EF || BC (ii) $EF = \frac{1}{2}BC$



Proof:- Join EF and extend it, and draw a line parallel to BA through C to meet to produced EF at D.

In Δ^s AEF and ΔCDF

AF = CF (F is the midpoint of AC)

$\angle AFE = \angle CFD$ (vertically opposite angles.)

and $\angle AEF = \angle CDF$ (Interior alternate angles as CD || BA with transversal ED.)

By A.S.A congruency rule

$\therefore$ Δ AEF $\cong$ ΔCDF (ASA congruency rule)

Thus AE = CD and EF = DF (CPCT)

We know AE = BE

Therefore BE = CD

Since BE || CD and BE = CD, BCDE is a parallelogram.

So ED || BC

$\Rightarrow$ EF || BC

As BCDE is a parallelogram, ED = BC(how ?) ($\because$ DF = EF)

we have shown FD = EF

$\therefore$ 2EF = BC

Hence $EF = \frac{1}{2}BC$

We can see that the converse of the above statement is also true. Let us state it and then see how we can prove it.

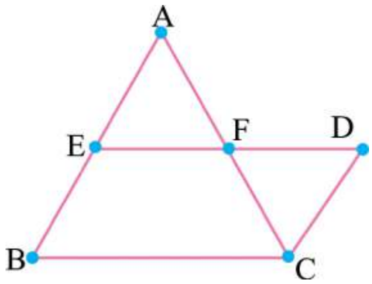
Theorem-8.8 : The line drawn through the midpoint of one of the sides of a triangle and parallel to another side will bisect the third side

Proof: Draw ΔABC. Mark E as the mid point of side AB. Draw a line *l* passing through E and parallel to BC. The line intersects AC at F.

Construct CD || BA

We have to show AF = CF

ہمیں یہ بتلانا ہے کہ (i) $EF \parallel BC$ اور (ii) $EF = \frac{1}{2} BC$



ثبوت : EF کو ملایئے اور اس کو بڑھایئے اور 'C' سے BA کے متوازی ایک خط کھینچیے جو EF سے بڑھائے گئے خط کو نقطہ 'D' پر قطع کرے۔

مثلثات AEF اور CDF میں

$AF = CF$ ('F' AC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle AFE = \angle CFD$ (راسی مقابل کے زاویئے)

اور $\angle AEF = \angle CDF$ (قاطع خط ED اور $BA \parallel CD$ کے داخلی متبادلہ زاویئے)

زاویہ ضلع، زاویہ اصول سے

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$ (زاویہ ضلع، زاویہ)

اس طرح $AE = CD$ اور $EF = DF$ (CPCT)

ہم یہ جانتے ہے کہ $AE = BE$

لہٰذا $BE = CD$

چونکہ $BE \parallel CD$ اور $BE = CD$، BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اس لیے $ED \parallel BC$

$EF \parallel BC$

جیسا کہ BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے، $ED = BC$ (کیسے؟) $(\because DF = EF)$

ہم نے ثابت کیا ہے کہ $FD = EF$

$\therefore 2EF = BC$

اس لیے $EF = \frac{1}{2} BC$

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ مندرجہ بالا بیان کا برعکس بھی صادق ہوگا۔ آیئے ہم اس کو بیان کریں گے، اور یہ دیکھیں کہ اس کو کس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔

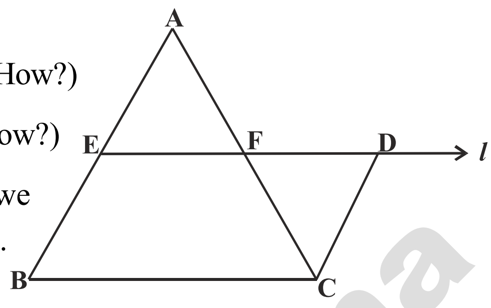
مسئلہ 8.8 : مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہے وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

ثبوت : ΔABC بنایئے۔ ضلع AB کے وسطی نقطہ 'E' کی نشاندہی کیجیے۔

نقطہ 'E' سے BC کے متوازی ایک خط l کھینچیے۔ یہ خط AC کو F پر قطع کرتا ہے۔ BA کے متوازی ایک خط CD بنایئے

یعنی $CD \parallel BA$ ہمیں یہ بتلانا ہے کہ $AF = CF$

Consider ΔAEF and ΔCFD



$\angle EAF = \angle DCF$ (BA || CD and AC is transversal) (How?)

$\angle AEF = \angle D$ (BA || CD and ED is transversal) (How?)

We can not prove the congruence of the triangles as we have not shown any pair of sides in the two triangles as equal.

To do so we consider EB || DC

and ED || BC

Thus EDCB is a parallelogram and we have BE = DC.

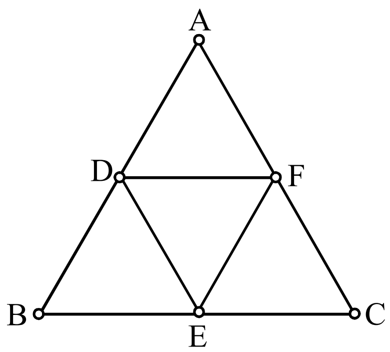
Since BE = AE we have AE = DC.

Hence $\Delta AEF \cong \Delta CFD$ (ASA)

$\therefore$ AF = CF

Some more examples

Example-7. In ΔABC, D, E and F are the midpoints of sides AB, BC and CA respectively. Show that ΔABC is divided into four congruent triangles, when the three midpoints are joined to each other. (ΔDEF is called medial triangle)



Proof : D, E are midpoints of $\overline{AB}$ and $\overrightarrow{AY}$ of triangle ABC respectively

So by Mid-point Theorem,

DE || AC

Similarly DF || BC and EF || AB.

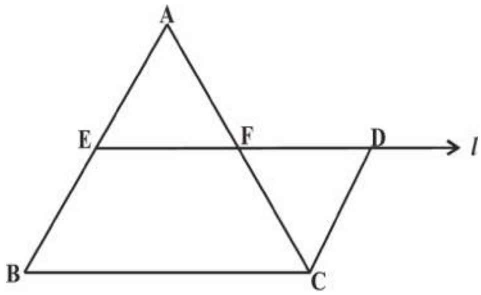
Therefore ADEF, BEFD, CFDE are all parallelograms

In the parallelogram ADEF, DF is the diagonal

So $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (Diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles)

Similarly $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

and $\Delta CEF \cong \Delta DEF$



ΔAEF اور ΔCFD پر غور کیجیے۔

$\angle EAF = \angle DCF$ ($BA \parallel CD$ اور AC ایک قاطع خط ہے)

(کیسے؟)

$\angle AEF = \angle D$ ($BA \parallel CD$ اور ED ایک قاطع خط ہے)

(کیسے؟)

یہاں ہم مثلثات کی متماثلت کو ثابت نہیں کر سکتے ہیں کیوں کہ ہمیں مثلثات کے کوئی بھی جوڑ کو مساوی نہیں بتایا گیا۔

ایسا کرنے کے لیے ہم $EB \parallel DC$ پر غور کرتے ہیں۔

اور $ED \parallel BC$

اس طرح $EDCB$ ایک متوازی الاضلاع ہے اور یہاں $BE = DC$

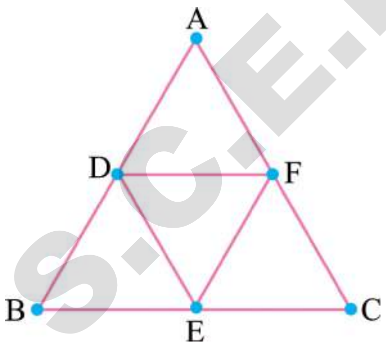
چوں کہ $BE = AE$ اور یہاں $AE = DC$

اس لیے $\Delta AEF \cong \Delta CFD$

$\therefore AF = CF$

مزید مثالیں

مثال (7) : ΔABC میں D، E اور F بالترتیب AB، BC اور CA کے وسطی نقاط ہیں۔ جب ان وسطی نقاط کو ملایا گیا تب ثابت کیجیے کہ ΔABC چار متماثل مثلثات میں تقسیم ہوتا ہے۔(ΔDEF وسطی مثلث کہلاتا ہے)



ثبوت : ΔABC میں D، E بالترتیب $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے وسطی نقاط ہیں۔

اس لیے وسطی نقطہ کے مسئلہ سے

$DE \parallel AC$

اسی طرح $DF \parallel BC$ اور $EF \parallel AB$

لہٰذا $ADEF$، $BEFD$، $CFDE$ متوازی الاضلاع ہیں۔

متوازی الاضلاع $ADEF$ میں DF ایک وتر ہے۔

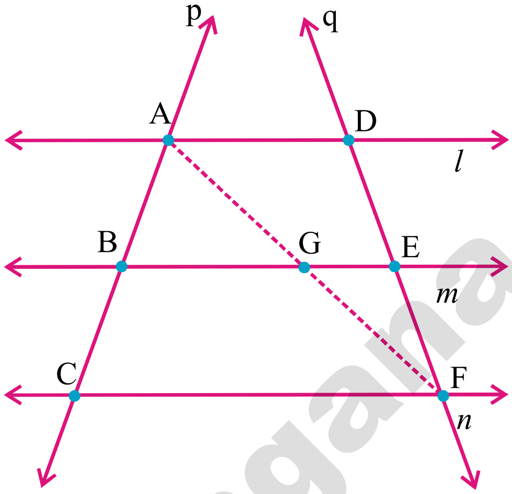
اس لیے $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے)

اسی طرح $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

اور $\Delta CEF \cong \Delta DEF$

So, all the four triangles are congruent.

We have shown that a triangle ABC is divided in to four congruent triangles by joining the midpoints of the sides.



Example-8. l, m and n are three parallel lines intersected by the transversals p and q at A, B, C and D,E, F such that they make equal intercepts AB and BC on the transversal p. Show that the intercepts DE and EF on q are also equal.

Proof : We need to connect the equality of AB and BC to comparing DE and EF. We join A to F and call the intersection point with 'm' as G.

In ΔACF, AB = BC (given)

Therefore B is the midpoint of AC.

and BG || CF (how ?)

So G is the midpoint of AF (By the theorem).

Now in Δ AFD, we can apply the same reason as G is the midpoint of AF and GE || AD, E is the midpoint of DF.

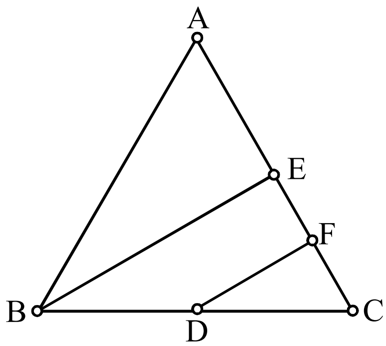
Thus DE = EF.

Hence l, m and n cut off equal intercepts on q also.

Example-9. In the Fig. AD and BE are medians of ΔABC and BE || DF. Prove that

$$CF = \frac{1}{4} AC.$$

Proof : If Δ ABC, D is the midpoint of BC and BE || DF; By Theorem F is the midpoint of CE.



$$\therefore\ CF = \frac{1}{2} CE$$

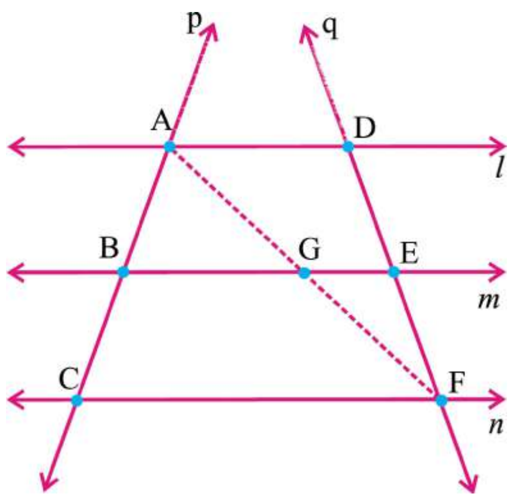
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC\right) \quad \text{(How ?)}$$

Hence $CF = \dfrac{1}{4} AC$.

Example-10. ABC is a triangle and through A, B, C lines are drawn parallel to BC, CA and AB respectively intersecting at P, Q and R. Prove that the perimeter of ΔPQR is double the perimeter of ΔABC.

اس لیے تمام چار مثلثات متماثل ہیں۔

ہم بتا چکے ہیں کہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے مثلث ABC چار متماثل مثلثات میں تقسیم ہو جاتا ہے۔



مثال (8) : l ،m اور n تین متوازی خطوط ہیں۔ جو قاطع خطوط p اور q سے A، B، C اور D، E، F پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ وہ خط p پر مساوی مقطوعہ AB اور BC بناتے ہیں۔ تب بتلائیے کہ q پر بننے والے مقطوعہ DE اور EF بھی مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ہمیں AB اور BC کی مساویت کا DE اور EF سے تقابل کرنے کی ضرورت ہے، A سے F کو ملائیے اور خط m کے نقطہ تقاطع کو 'G' کا نام دیجیے۔

ΔACF میں AB = BC (دیا گیا ہے)

لہٰذا 'B' AC کا وسطی نقطہ ہے۔

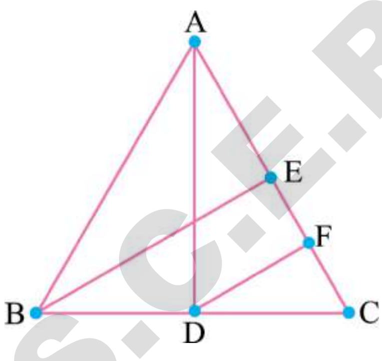
اور CF ‖ BG (کیسے؟)

اس لیے 'G' AF کا وسطی نقطہ ہے (مسئلہ کی رو سے)

اب ΔAFD میں ہم اسی رشتہ کا اطلاق کر سکتے ہیں یعنی 'G' AF کا وسطی نقطہ ہے اور GE‖AD، تب 'E' DF کا وسطی نقطہ ہوگا۔

اس طرح DE = EF

اس لیے l، m اور n بھی q پر مساوی مقطوعہ بناتے ہیں۔



مثال (9) : شکل میں AD اور BE، ΔABC کے وسطانیے ہیں، اور BE ‖ DF

تب ثابت کیجیے کہ $CF = \frac{1}{4}$ AC

ثبوت : ΔABC میں 'D' BC کا وسطی نقطہ ہے اور BE ‖ DF۔ مسئلہ کی رو سے F، CE کا وسطی نقطہ ہے۔

$\therefore\ CF = \frac{1}{2} CE$

$= \frac{1}{2} [\frac{1}{2} AC]$ (کیسے؟)

لہٰذا $CF = \frac{1}{4} AC$

مثال (10) : ABC ایک مثلث ہے، جہاں A، B، C سے بالترتیب BC، CA اور AB کے متوازی خطوط کھینچے گئے جو P، Q اور R پر قطع کرتے ہیں۔ تب بتلائیے کہ ΔPQR کا احاطہ ΔABC کے احاطہ کا دگنا ہے۔

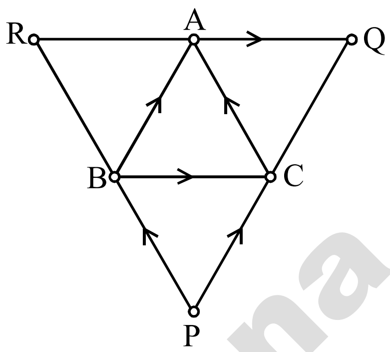
Proof : AB || QP and BC || RQ So ABCQ is a parallelogram.

Similarly BCAR, ABPC are parallelograms

$\therefore$ BC = AQ and BC = RA

$\Rightarrow$ A is the midpoint of QR

Similarly B and C are midpoints of PR and PQ respectively.



$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ$; $BC = \frac{1}{2}QR$ and $CA = \frac{1}{2}PR$ (How)

(State the related theorem)

Now perimeter of ΔPQR = PQ + QR + PR

= 2AB + 2BC + 2CA

= 2(AB + BC + CA)

= 2 (perimeter of ΔABC).

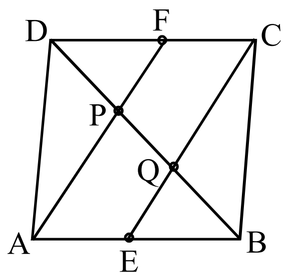
Exercise - 8.4

1. ABC is a triangle. D is a point on AB such that $AD = \frac{1}{4}AB$ and E is a point on AC such that $AE = \frac{1}{4}AC$. If DE = 2 cm find BC.

2. ABCD is quadrilateral E, F, G and H are the midpoints of AB, BC, CD and DA respectively. Prove that EFGH is a parallelogram.

3. Show that the figure formed by joining the midpoints of sides of a rhombus successively is a rectangle.

4. In a parallelogram ABCD, E and F are the midpoints of the sides AB and DC respectively. Show that the line segments AF and EC trisect the diagonal BD.



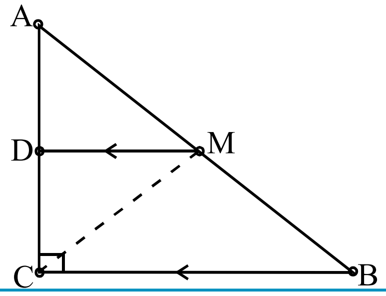
5. Show that the line segments joining the midpoints of the opposite sides of a quadrilateral and bisect each other.

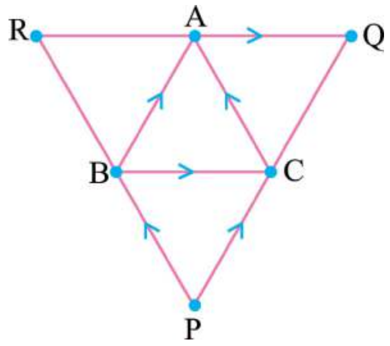
6. ABC is a triangle right angled at C. A line through the midpoint M of hypotenuse AB and Parallel to BC intersects AC at D. Show that

   (i) D is the midpoint of AC

   (ii) $MD \perp AC$

   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$.





ثبوت : AB||QP اور BC||RQ اس لیے ABCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اسی طرح ABPC، BCAR بھی متوازی الاضلاع ہیں۔

$BC = RA$ اور $\therefore BC = AQ$

دلالت کرتا ہے کہ 'A' QR کا وسطی نقطہ ہے۔

اسی طرح B اور C بھی بالترتیب PR اور PQ کے وسطی نقاط ہیں

$AB = \frac{1}{2}PQ$ ، $BC = \frac{1}{2}QR$ اور $CA = \frac{1}{2}PR$ (کیسے؟)

(متعلقہ مسئلہ بیان کیجیے)

اب مثلث کا احاطہ $\Delta PQR = PQ + QR + PR$

$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

$= 2$ (ΔABC کا احاطہ)

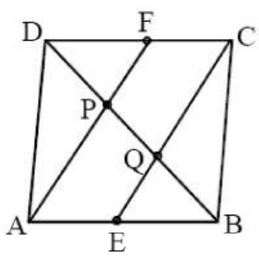
مشق 8.4

1. ABC ایک مثلث ہے AB پر ایک نقطہ D ایسا ہے کہ $AD = \frac{1}{4}AB$ اور AC پر ایک نقطہ 'E' ایسا ہے کہ $AE = \frac{1}{4}AC$ اگر $DE = 2cm$ ہو تب BC معلوم کیجیے۔

2. ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ E، F، G اور H بالترتیب AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط ہیں تب ثابت کیجیے کہ EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے۔

3. بتلائیے کہ ایک معین کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے بننے والی شکل ایک مستطیل ہوگی۔

4. ایک متوازی الاضلاع ABCD میں E اور F بالترتیب AB اور DC کے وسطی نقاط ہیں تب بتلائیے کہ AF اور EC وتر BD کی تثلیث کرتے ہیں۔

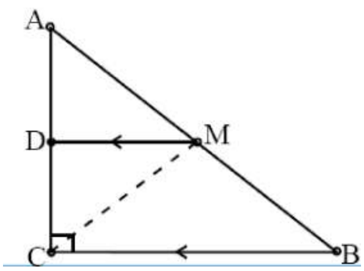


5. بتلائیے کہ ایک چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے پر بننے والے خطی مقطوعے ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

6. ABC، C پر ایک قائم الزاویہ مثلث ہے، وتر AB کے وسطی نقطہ M سے BC کے متوازی ایک خط کھینچا گیا جو AC کو D پر قطع کرتا ہے۔ تب بتلائیے کہ

(i) 'D' AC کا وسطی نقطہ ہے۔ (ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$



What have we discussed?

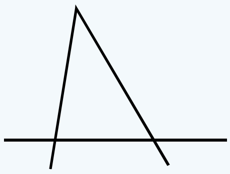
1. A quadrilateral is a simple closed figure formed by four line segments in a plane.

R2T9U7

2. The sum of four angles in a quadrilateral is 360^0 or 4 right angles.
3. Trapezium, parallelogram, rhombus, rectangle, square and kite are special types of quadrilaterals.
4. Parallelogram is a special type of quadrilateral with many properties. We have proved the following theorems.
   a) The diagonal of a parallelogram divides it into two congruent triangles.
   b) The opposite sides and angles of a parallelogram are equal.
   c) If each pair of opposite sides of a quadrilateral are equal then it is a parallelogram.
   d) If each pair of opposite angles are equal then it is a parallelogram.
   e) Diagonals of a parallelogram bisect each other.
   f) If the diagonals of a quadrilateral bisect each other then it is a parallelogram.
5. Mid point theorm of triangle and converse
   a) The line segment joining the midpoints of two sides of a triangle is parallel to the third side and also half of it.
   b) The line drawn through the midpoint of one of the sides of a triangle and parallel to another side will bisect the third side.

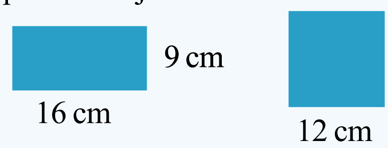
Brain teaser

1. Creating triangles puzzle



Add two straight lines to the above diagram and produce 10 triangles.

2. Take a rectangular sheet of paper whose length is 16 cm and breadth is 9 cm. Cut it in to exactly 2 pieces and join them to make a square.

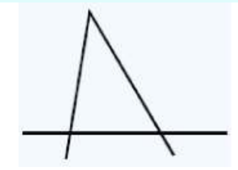


ہم نے کیا سیکھا

1. ایک مستوی میں چار خطوط سے بننے والی سادہ بند شکل کو چار ضلعی کہتے ہیں۔
2. چار ضلعی کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360^0 یا چار زاویۂ قائمہ ہوتا ہے۔
3. منحرف، متوازی الاضلاع، معین، مستطیل، مربع اور پتنگ چار ضلعی کی خاص اقسام ہیں۔
4. متوازی الاضلاع چار ضلعی کی ایک خاص قسم ہے جس کی کئی خصوصیات ہوتی ہیں، اس باب میں ہم نے حسب ذیل مسئلوں کو ثابت کیا ہے۔
   (a) متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔
   (b) متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع اور زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
   (c) ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے اضلاع کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
   (d) ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے زاویوں کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
   (e) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
   (f) اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہوں تو وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
5. مثلث کے وسطی نقطہ کا مسئلہ اور اس کا برعکس
   (a) ایک مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی اور اس کا نصف ہوتا ہے۔
   (b) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا، خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہے تب وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا۔

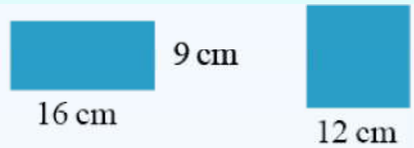
دماغی ورزش

1. مثلثات کا پزل (Puzzle) بنایئے۔



مندرجہ بالا ڈائیگرام میں دو خطوط مستقیم کا اضافہ کیا جائے اور 10 مثلثات بنایئے۔

2. ایک مثلثی شیٹ لیجیے جسکا طول 16 سمر اور عرض 9 سمر ہو۔ ان کو 2 حصوں میں تقسیم کیا جائے ان کو ملانے پر ایک مربع حاصل ہو۔



Chapter 11

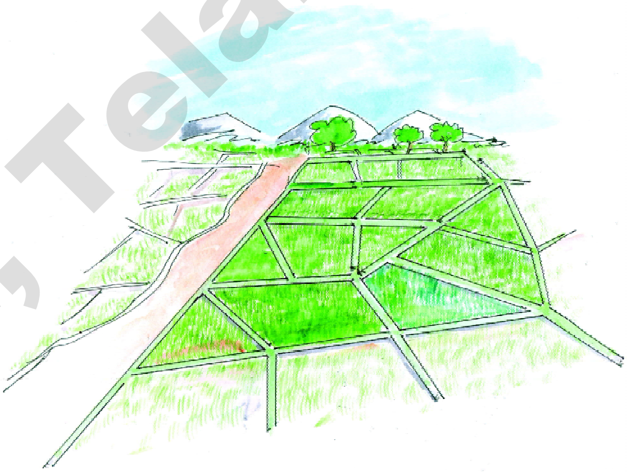
Areas

B4Y5K6

11.1 Introduction

Have you seen agricultural fields around your village or town? The land is divided amongst various farmers and there are many fields. Are all the fields of the same shape and same size? Do they have the same area? If a field has to be further divided among some persons, how will they divide it? If they want equal area, what can they do?

How does a farmer estimate the amount of fertilizer or seed needed for field? Does the size of the field have anything to do with this number?



The earliest and the most important reason for the initiation of the study of geometry is agricultural organisation. This includes measuring the land, dividing it into appropriate parts and recasting boundaries of the fields for the sake of convenience. In history you may have discussed the floods of river Nile (Egypt) and the land markings generated later . Some of these fields resemble the basic shapes such as square, rectangle trapezium, parallelograms etc., and some are in irregular shapes. For the basic shapes, we follow the rules to find areas from given measurements. We would study some of them in this chapter. We will learn how to calculate areas of triangles, squares, rectangles and quadrilaterals by using formulae. We will also explore the basis of those formulae. We will discuss how are they derived ? What do we mean by 'area'?

11.2 Area of Planar Regions

You may recall that the part of the plane enclosed by a simple closed figure is called a planar region corresponding to that figure. The magnitude or measure of this planar region is its area.

باب
11

رقبے

11.1 تعارف

کیا آپ نے اپنے گاؤں یا شہر کے اطراف زرعی زمینات دیکھی ہیں؟ان زمینات کومختلف کسانوں کے درمیان تقسیم کیا گیا ہے اس طرح یہاں پر کئی کھیت ہیں کیا ان کے رقبے مساوی ہیں؟ اگر ایک کھیت کومزید چند اشخاص میں بانٹ دیا جائے تو اس کو وہ کس طرح تقسیم کریں گے؟ اگر وہ اس کھیت کا مساوی رقبہ لینا چاہتے ہوں تب وہ کیا کر سکتے ہیں؟

کسان اس کے کھیت کے لئے درکار کھاد اور بیج کی مقدار کو کس طرح محسوب کرتا ہے؟ کیا کھیت کے رقبے اس کے لئے درکار کھاد کی مقدار میں کچھ تعلق ہوتا ہے یا نہیں؟

ابتداء میں جیومیٹری کی تعلیم کی افادیت و اہمیت سب سے زیادہ زراعتی شعبہ کی ضرورت کی وجہ سے ہوئی جس میں زمین کی پیمائش کرنا اور اس کو متناسب حصوں میں تقسیم کرنا اور کھیتوں کے حدود کی حد بندی وغیرہ کے لئے جیومٹری کا استعمال کیا گیا۔

تاریخ سے ہمیں اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ دریائے نیل کے طوفان مصر کے بعد زمین کے خطوں کی نشاندہی کا آغاز ہوا۔ان میں سے کچھ کھیتوں کی شکلیں مربع، مستطیل، منحرف اور متوازی الاضلاع کے علاوہ چند غیر منتظم اشکال کی تھیں۔

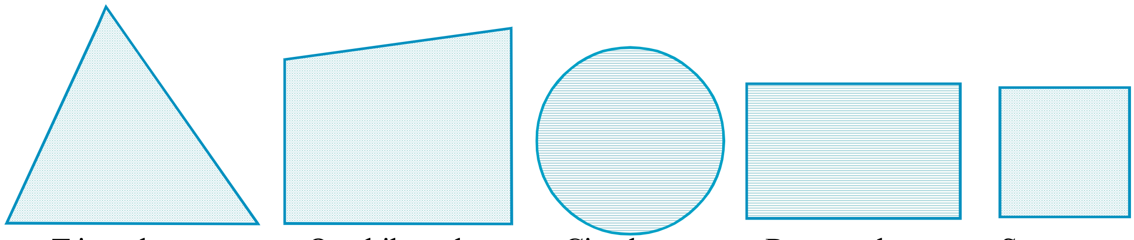
ان بنیادی اشکال کے لئے ان کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے مختلف پیمائشات سے اصول اخذ کئے گئے۔ہم اس باب میں ان میں سے چند کے بارے میں پڑھیں گے۔ہم سیکھیں گے کہ کیسے مثلث، مربع، متوازی الاضلاع، مستطیل اور چار ضلعی کے رقبوں کو ضابطے کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے۔

ان کے علاوہ ہم ان ضابطوں کے بنیادی اصولوں کو بیان کریں گے اور کس طرح ان کو اخذ کیا جاتا ہے اس پر بھی مباحثہ کریں گے۔

''رقبہ'' سے ہم کیا مراد لیتے ہیں؟

11.2 مستوی قطعوں کے رقبے

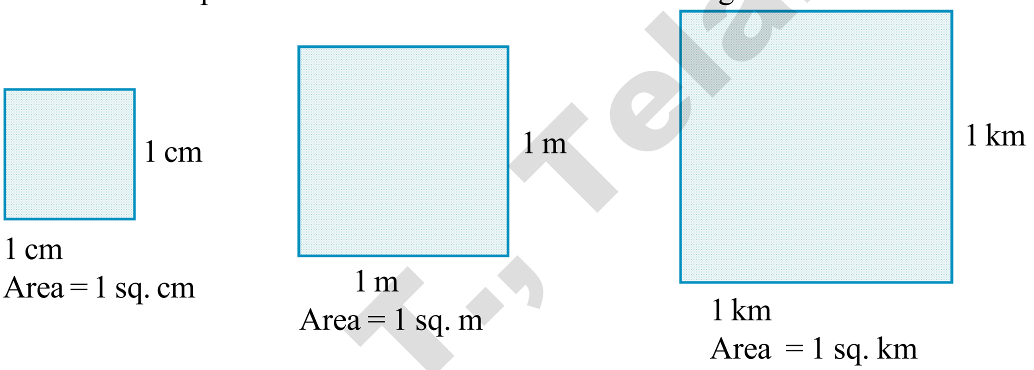
اب آپ اعادہ کر سکتے ہیں کہ ''ایک سادہ بند مستوی جو کسی شکل کا حصہ ہو اور اس شکل کے تناظر میں مستوی قطعہ کہلاتا ہو'' اس مستوی قطعے کی مقدار یا پیمائش اس کا ''رقبہ'' کہلاتا ہے۔



Triangular region | Quadrilateral region | Circular region | Rectangular region | Square region

A planar region consists of a boundary and an interior region. How can we measure the area of this? The magnitude of measure of these regions (i.e. areas) is always expressed with a positive real number (in some unit of area) such as 10 cm^2, 215 m^2, 2 km^2, 3 hectares etc. So, we can say that area of a figure is a number (in some unit of area) associated with the part of the plane enclosed by the figure.

The unit area is the area of a square of a side of unit length. Hence **square centimeter** (or 1cm^2) is the area of a square drawn on a side one centimeter in length.

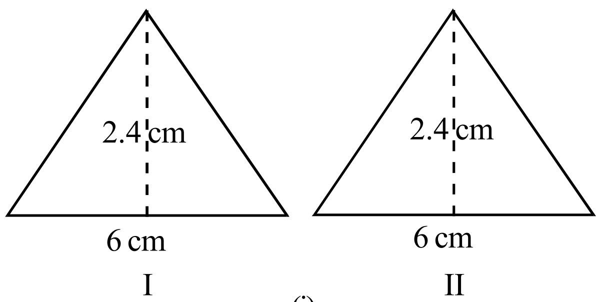


The terms square meter (1m^2), square kilometer (1km^2), square millimeter (1mm^2) are to be understood in the same sense. We are familiar with the concept of congruent figures from earlier classes. Two figures are congruent if they have the same shape and the same size.

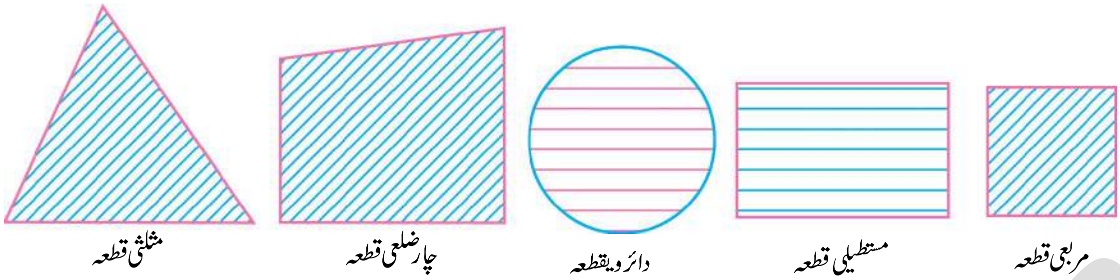
ACTIVITY

Observe Figure I and II. Find the area of both figures. Are the areas equal?

Trace these figures on a sheet of paper, cut them. Cover fig. I with fig. II. Do they cover each other completely? Are they congruent?

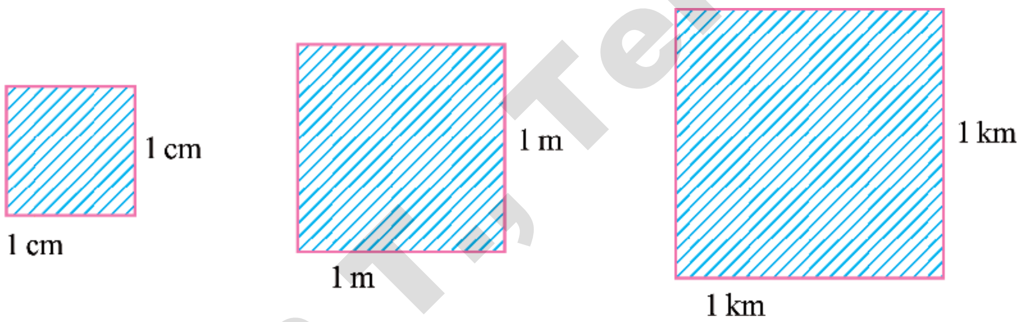


(i)



ایک مستوی قطعہ، اندرونی حصے اور اس کے حدود پر مشتمل ہوتا ہے۔ ہم ان کے رقبوں کی پیمائش کس طرح کرتے ہیں؟ ان قطعوں کی پیمائش کی مقدار (رقبے) کو ہمیشہ مثبت حقیقی قدر میں ظاہر کرتے ہیں۔ جیسا کہ $10cm^2$، $215m^2$ اور $2km^2$، 3 ہیکٹر وغیرہ۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی شکل کا رقبہ عدد ہوتا ہے (جو کسی اکائی رقبہ کے ساتھ لی گئی مقدار ہے) جو ایک بند مستوی شکل سے مربوط ہوتا ہے۔

اکائی رقبہ دراصل ایک مربع کا رقبہ ہوتا ہے جس کا ضلع اکائی طول پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس طرح ''مربع سمر'' یا ($1\ cm^2$) یعنی ایسے کھینچے گئے مربع کا رقبہ ہے جس کے ضلع کا طول ایک سمر ہوتا ہے۔



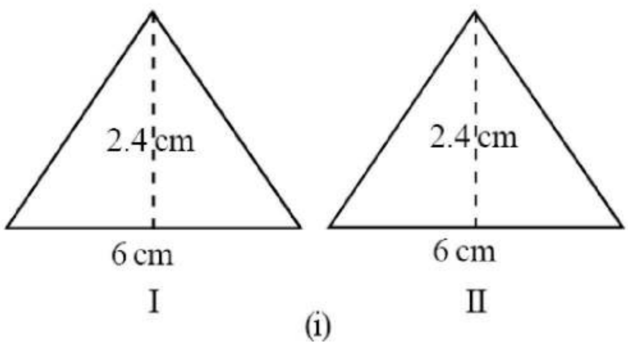
رقبہ = ایک مربع کلومیٹر　　　رقبہ = 1 مربع میٹر　　　رقبہ = 1 مربع سمر

پچھلے اسباق میں ہم متماثل اشکال سے متعلق واقفیت حاصل کر چکے ہیں۔ اشکال اس وقت متماثل ہوتی ہیں جب ان کی شکل یکساں اور جسامت دونوں مساوی ہوں۔

عملی کام

متصلہ شکل I اور II کا مشاہدہ کیجئے ان دو اشکال کا رقبہ معلوم کیجئے؟ کیا ان کے رقبے مساوی ہیں؟

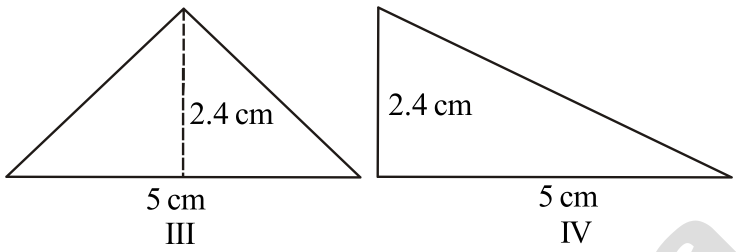
ان اشکال کو کاغذ پر بنایئے اور ان کو کاٹ کر شکل I کو شکل II پر رکھئے۔ کیا یہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں کیا یہ اشکال متماثل ہیں؟

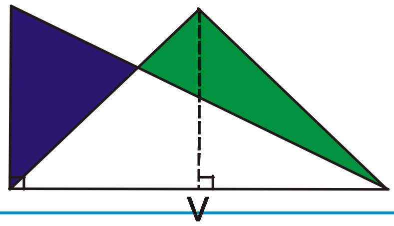


Observe fig. III and IV. Find the areas of both. What do you notice?

Are they congruent?

Now, trace these figures on sheet of paper. Cut them let us cover fig. III by fig. IV by conciding their bases (length of same side).

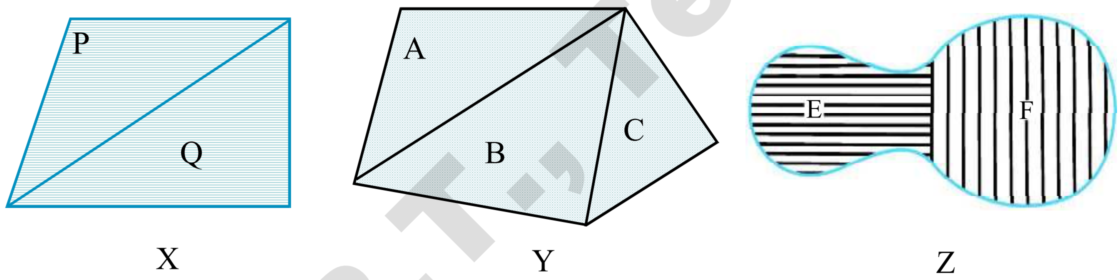




As shown in figure V are they covered completely?

We conclude that Figures I and II are congruent and equal in area. But figures III and IV are equal in area but they are not congruent.

Now consider the figures given below:



You may observe that planar region of figures X, Y, Z is made up of two or more planar regions. We can easily see that

Area of figure X = Area of figure P + Area of figure Q.

Similarly area of (Y) = area of (A) + area of (B) + area of (C)

area of (Z) = area of (E) + area of (F).

Thus the area of a figure is a number (in some units) associated with the part of the plane enclosed by the figure with the following properties.

(**Note :** We use area of a figure (X) briefly as ar(X) from now onwards)

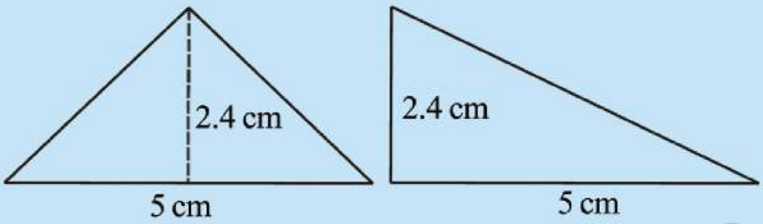
(i) The areas of two congruent figures are equal.

If A and B are two congruent figures, then ar(A) = ar(B)

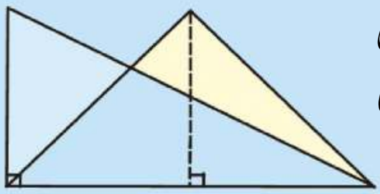
(ii) The area of a figure is equal to the sum of the areas of finite number of parts of it.

If a planar region formed by a figure X is made up of two non-overlapping planar regions formed by figures P and Q then ar(X) = ar(P) + ar(Q).

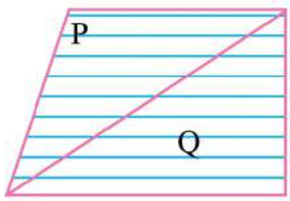
اشکال III اور IV کا مشاہدہ کیجئے
ان دونوں کا رقبہ معلوم کیجئے؟ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟ کیا یہ متماثل مثلثات ہیں؟
اب ان اشکال کو کاغذ پر بنائیے اور ان کو کاٹ کر ایک دوسرے پر اس طرح رکھیں کہ ان کے قاعدے ایک دوسرے پر منطبق ہو (مساوی طول والا ضلع) جیسا کہ شکل V میں بتلایا گیا ہے۔ کیا وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں؟



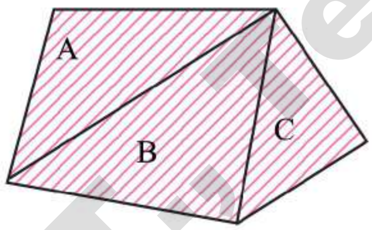
III IV


V

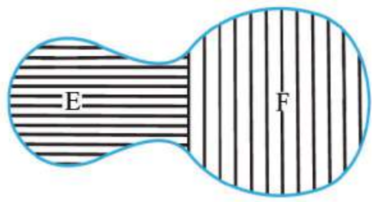
ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ اشکال I اور II متماثل ہیں اور رقبوں میں بھی مساوی ہیں لیکن اشکال III اور IV رقبوں میں مساوی ہیں لیکن متماثل نہیں ہیں۔ آیئے نیچے دی گئی اشکال پر غور کریں۔



X



Y



Z

آپ ان اشکال میں مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ مستوی قطعے X، Y اور Z مزید دو یا دو سے زیادہ مستوی قطعوں پر مشتمل ہیں۔ شکل X میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

شکل Q کا رقبہ + شکل P کا رقبہ = شکل X کا رقبہ ∴

اسی طرح

(C) کا رقبہ + (B) کا رقبہ + (A) کا رقبہ = Y کا رقبہ ∴

(F) کا رقبہ + (E) کا رقبہ = Z کا رقبہ ∴

اس طرح کسی شکل کا رقبہ ایک مقدار ہے (چند اکائیوں میں) جو اس شکل میں موجود بند مستوی حصوں کے علاوہ ان خصوصیات پر مشتمل ہوتا ہے۔

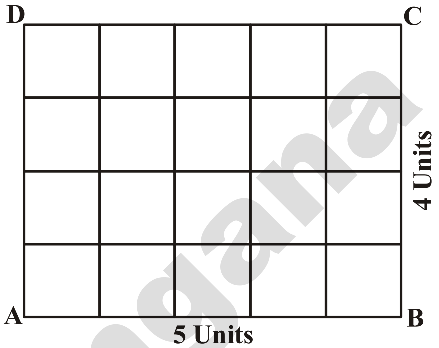
(نوٹ: اب ہم شکل X کے رقبہ کو Area (X) کے بجائے صرف Ar(X) سے ظاہر کریں گے۔)

(i) دو متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے
اگر A اور B دو متماثل اشکال ہیں تب Ar(A)=Ar(B)

(ii) شکل کا رقبہ اس کے متناہی حصوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر مستوی شکل X جو دو غیر منطبق مستوی قطعوں p اور q پر مشتمل ہے تب ar (X) = ar (P) + ar(Q)

11.3 Area of Rectangle

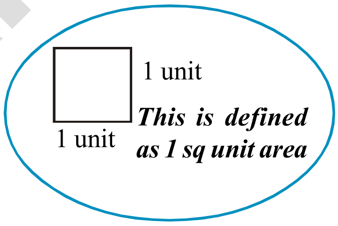
If the number of units in the length of a rectangle is multiplied by the number of units in its breadth, the product gives the number of square units in the area of rectangle



Let ABCD represent a rectangle whose length AB is 5 units and breadth BC is 4 units.

Divide AB into 5 equal parts and BC into 4 equal parts and through the points of division of each line draw parallels to the other. Each compartment in the rectangle represents one square unit (why ?)

$\therefore$ The rectangle contains 5 units $\times$ 4 units. That is 20 square units.



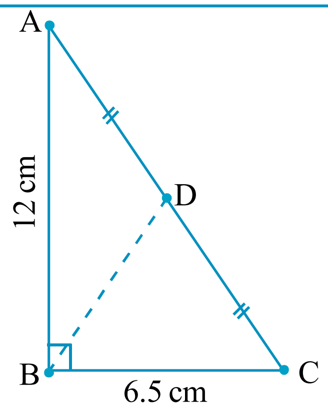
Similarly, if the length is 'l' units and breadth is 'b' units then the area of rectangle is 'lb' square units. That is "length $\times$ breadth" square units gives the area of a rectangle.

Think, Discuss and Write

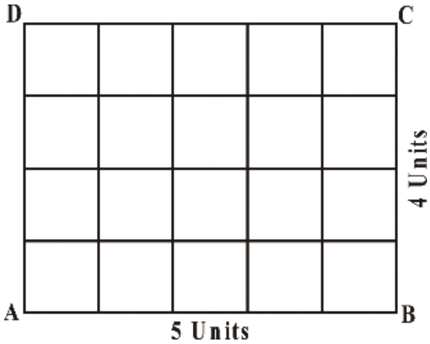
1. If 1cm represents 5m, what would be an area of 6 square cm. represent ?
2. Rajni says 1 sq.m = 100^2 sq.cm. Do you agree? Explain.

Exercise - 11.1

1. In ΔABC, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = DC$, $AB = 12cm$ and $BC = 6.5$ cm. Find the area of ΔADB.



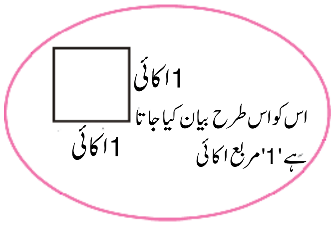
11.3 مستطیل کا رقبہ



اگر مستطیل کے طول میں موجود اکائیوں کی تعداد کو اس کے عرض میں موجود اکائیوں کی تعداد سے ضرب دینے پر مربع اکائیوں کی تعداد حاصل ہوتی ہے۔ جو مستطیل کا رقبہ کہلاتی ہے۔

فرض کرو کہ ABCD ایک مستطیل کو ظاہر کرتا ہے۔ جس میں $\overline{AB}$ طول جو 5 اکائیاں ہے اور $\overline{BC}$ جو 4 اکائیاں ہے۔

طول $\overline{AB}$ کو 5 مساوی حصوں میں اور عرض $\overline{BC}$ کو 4 مساوی حصوں میں تقسیم کیجیے۔ اور ان ضلعوں پر منقسم نقاط سے متوازی خطوط کھینچیے۔ مستطیل میں ان خطوط سے حاصل ہونے والا ہر ایک قطعہ ایک مربع اکائی کو ظاہر کرتا ہے (کیوں؟)



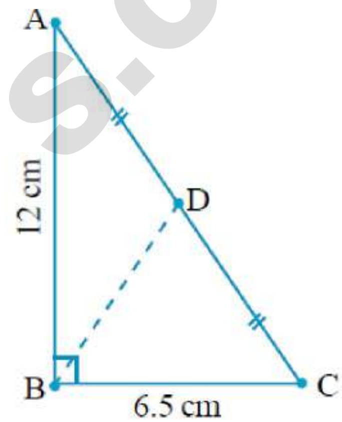
∴ مستطیل (5 اکائیاں × 4 اکائیاں) پر مشتمل ہے۔ اس طرح مستطیل کا رقبہ 20 مربع اکائیاں ہے۔

اسی طرح اگر طول 'a' اکائیاں اور عرض 'b' اکائیاں ہو تب مستطیل کا رقبہ 'ab' مربع اکائیاں ہوتا ہے۔ یعنی "طول × عرض" مربع اکائیوں سے مستطیل کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

سوچئے، مباحثہ کیجیے اور لکھیے

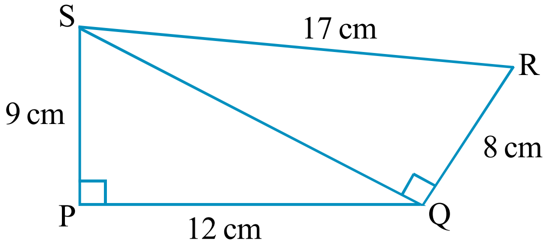
1. اگر 5m کو 1cm سے ظاہر کیا جائے، تب 6 مربع سمر رقبے کو اس کی حقیقی پیمائش میں ظاہر کیجیے۔
2. حنا *1sqm = 100sq.cm* کہتی ہے۔ کیا آپ اُس کے جواب سے متفق ہیں؟ وضاحت کیجیے۔

مشق 11.1

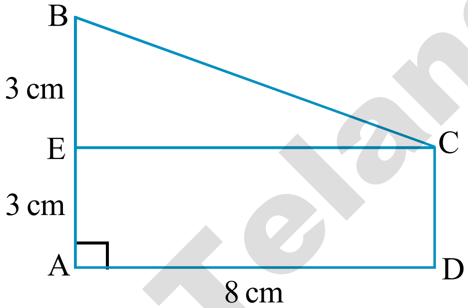


1. ΔABC میں $\angle ABC = 90^0$، AD=DC، AB=12cm اور BC=6.5cm تب ΔADB کا رقبہ معلوم کیجیے۔

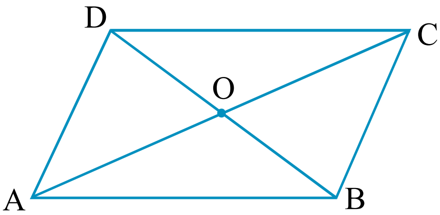
2. Find the area of a quadrilateral PQRS in which $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, PQ = 12 cm, PS = 9 cm, QR = 8 cm and SR = 17 cm (**Hint:** PQRS has two parts)



3. Find the area of trapezium ABCD as given in the figure in which ADCE is a rectangle. (**Hint:** ABCD has two parts)



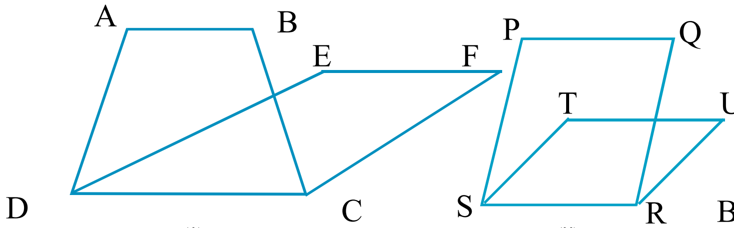
4. ABCD is a parallelogram. The diagonals AC and BD intersect each other at 'O'. Prove that ar(ΔAOD) = ar(ΔBOC). (**Hint:** Congruent figures have equal area)

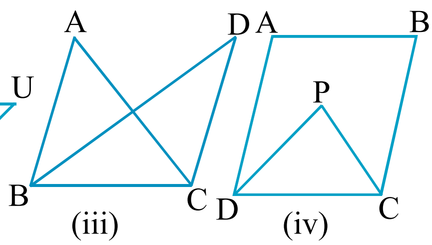


11.4 Figures on the same base and between the same parallels

We shall now study some relationships between the areas of some geometrical figures under the condition that they lie on the same base and between the same parallels. This study will also be useful in understanding of some results on similarity of triangles.

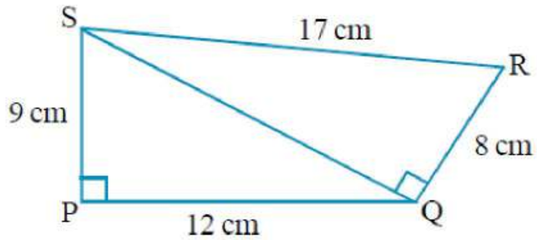
Look at the following figures.



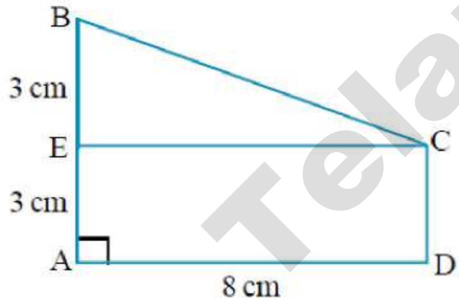


(i) (ii) (iii) (iv)

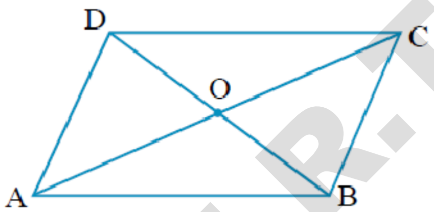
2. مستطیل PQRS کا رقبہ معلوم کیجئے جس میں $\angle QPS = \angle SQR = 90^{o}$, PQ=12cm، PS=9، QR=8cm اور SR=17cm ہیں۔(اشارہ: PQRS دوحصوں پر مشتمل ہیں)



3. شکل میں دیئے گئے منحرف ABCD کا رقبہ معلوم کیجئے جس میں ADCE مستطیل ہے۔(اشارہ: ABCD دوحصوں پر مشتمل ہے)۔



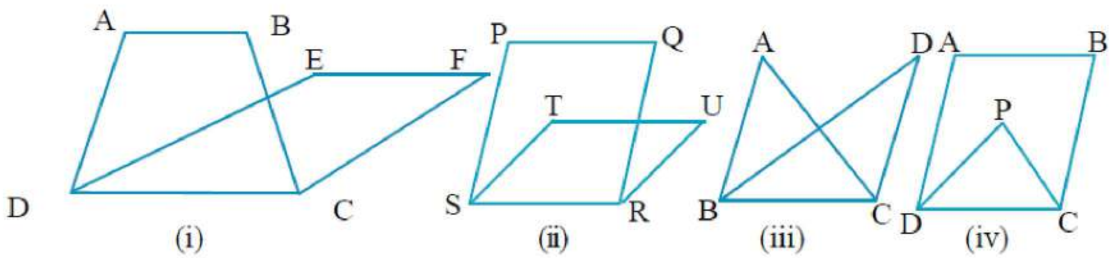
4. متوازی الاضلاع ABCD میں اس کے وتر AC اور BD نقطہ ' O ' پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ثابت کیجئے کہ ar(ΔAOD)=ar(ΔBOC) (اشارہ: متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے)۔



11.4 اشکال جوایک ہی قاعدے اوران ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

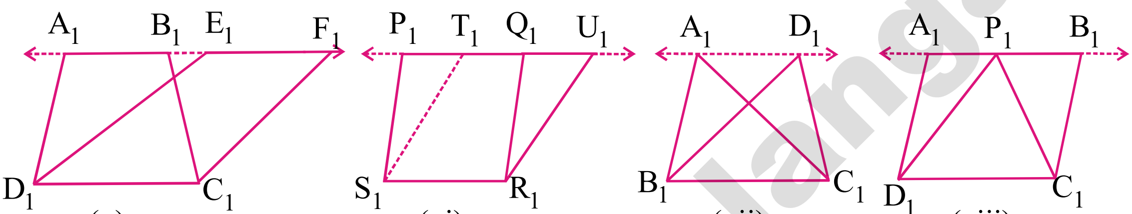
ہم یہاں ایسے جیومٹری اشکال جوایک ہی قاعدے اورایک ہی متوازی خطوط کے درمیان بنائی گئی ہوں کے رقبوں میں پائے جانے والے رشتہ کے تعلق سے مطالعہ کریں گے۔اس موضوع کے مطالعے سے ہم مثلثات کی مشابہت کے لئے چندنتائج کا فہم حاصل کریں گے۔

آیئے مندرجہ ذیل اشکال پرنظر ڈالیں۔



In Fig(i) a trapezium ABCD and parallelogram EFCD have a common side CD. We say that trapezium ABCD and parallelogram EFCD are on the same base CD. Similarly in fig(ii) the base of parallelogram PQRS and parallelogram TURS is the same. In fig(iii) Triangles ABC and DBC have the same base BC. In Fig(iv) parallelogram ABCD and triangle PCD lie on DC so, all these figures are of geometrical shapes are therefore on the same base. They are however not between the same parallels as AB does not overlap EF and PQ does not overlap TU etc. Neither the points A, B, E, F are collinear nor the points P, Q, T, U. What can you say about Fig(iii) and Fig (iv)?

Now observe the following figures.



(v) (vi) (vii) (viii)

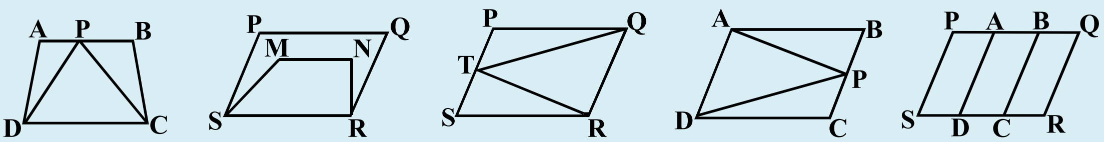
What difference have you observed among the figures? In Fig(v), We say that trapezium $A_1B_1C_1D_1$ and parallelogram $E_1F_1C_1D_1$ are on the same base and between the same parallels A_1F_1 and D_1C_1. The points A_1, B_1, E_1, F_1 are collinear and $A_1F_1 \parallel D_1C_1$. Similarly in fig. (vi) parallelograms $P_1Q_1R_1S_1$ and $T_1U_1R_1S_1$ are on the same base S_1R_1 and between the same parallels P_1U_1 and S_1R_1. Name the other figures on the same base and the parallels between which they lie in fig. (vii) and (viii).

So, two figures are said to be on the same base and between the same parallels, if they have a common base (side) and the vertices (or the vertex) opposite to the common base of each figure lie on a line parallel to the base.

THINK, DISCUSS AND WRITE

Which of the following figures lie on the same base and between the same parallels?

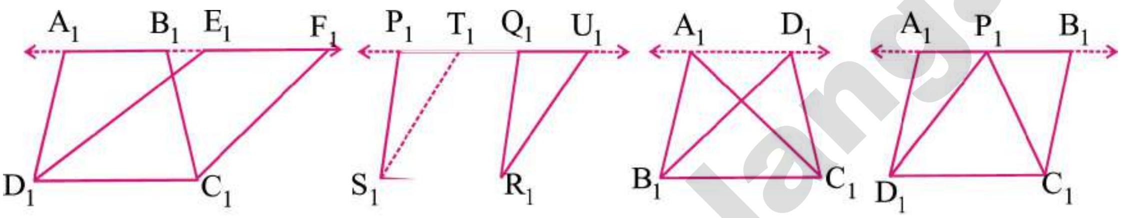
In such a cases, write the common base and the two parallels.



(a) (b) (c) (d) (e)

شکل (i) میں منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD کا ایک مشترک ضلع CD ہے۔اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD ایک ہی قاعدے CD پر واقع ہیں۔اس طرح شکل (ii) میں متوازی الاضلاع PQRS اور متوازی الاضلاع TURS ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں۔شکل (iii) میں مثلثات ABC اور DBC ایک ہی قاعدے BC پر واقع ہے۔شکل (iv) میں متوازی الاضلاع ABCD اور مثلث PCD ایک ہی قاعدے DC پر مشتمل ہیں۔اس طرح یہ تمام اشکال جیومٹری اشکال ہیں جو ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں۔ یہ اشکال ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع نہیں ہیں۔جیسا کہ ضلع AB، EF پر منطبق نہیں ہوتا ہے۔ اور PQ، TU پر منطبق نہیں ہوتا ہے وغیرہ۔نہ تو نقاط A,B,C,D ہم خط ہیں اور نہ نقاط PQTU ہم خط ہیں۔آپ اشکال (iii) اور (iv) کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل اشکال پر غور کیجئے۔



(v) (vi) (vii) (viii)

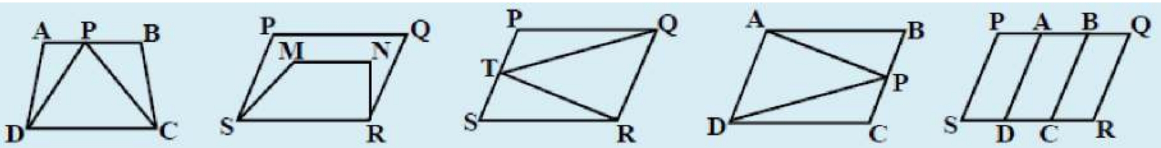
آپ ان اشکال میں کون کونسے فرق کا مشاہدہ کرتے ہیں؟ شکل (v) میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ منحرف $A_1 B_1 C_1 D_1$ اور متوازی الاضلاع $E_1 F_1 C_1 D_1$ ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان $A_1 F_1$ اور $D_1 C_1$ پر واقع ہیں۔نقاط $A_1 B_1 E_1$ اور F_1 ہم خط نقاط ہیں۔اور AF||DG اسی طرح شکل (vi) میں $P_1 Q_1 R_1 S_1$ اور $T_1 U_1 R_1 S_1$ متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے $S_1 R_1$ اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ $P_1 V_1$ اور $S_1 R_1$ کے درمیان واقع ہیں۔(vii) اور (viii) میں دی گئی اشکال کے نام بتلایئے جو ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔

اس طرح دو اشکال اس صورت میں ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان اشکال کا قاعدہ مشترک ہیں اور ہر شکل کے مشترک قاعدے کے مقابل کے راس (نقاط) قاعدے کے متوازی اسی خطوط پر واقع ہیں۔

سوچئے، مباحثہ کیجئے اور لکھئے

مندرجہ ذیل میں کونسے اشکال ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں؟

اس صورت میں مشترک قاعدہ اور متوازی خطوط کے جوڑ کے نام بتلایئے؟



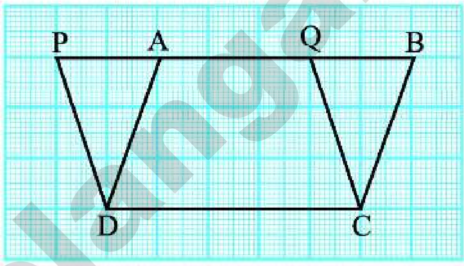
(a) (b) (c) (d) (e)

11.5 PARALLELOGRAMS ON THE SAME BASE AND BETWEEN THE SAME PARALLELS

Now let us try to find a relation, if any, between the areas of two parallelograms on the same base and between the same parallels. For this, let us perform the following activity.

ACTIVITY

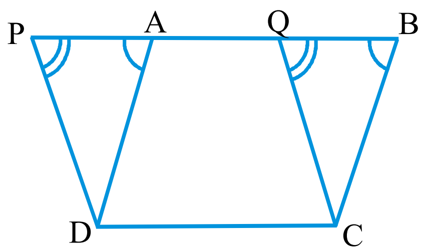
Take a graph sheet and draw two parallelograms ABCD and PQCD on it as show in the Figure-



The parallelograms are on the same base DC and between the same parallels PB and DC Clearly the part DCQA is common between the two parallelograms. So if we can show that ΔDAP and ΔCBQ have the same area then we can say ar(PQCD) = ar(ABCD).

Theorem-11.1 : Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.

Proof: Let ABCD and PQCD are two parallelograms on the samebase DC and between the parallel lines DC and PB.



In ΔDAP and ΔCBQ

PD || CQ and PB is transversal $\angle DPA = \angle CQB$

and AD || CB and PB is transversal $\angle DAP = \angle CBQ$

also PD = QC as PQCD is a parallelogram.

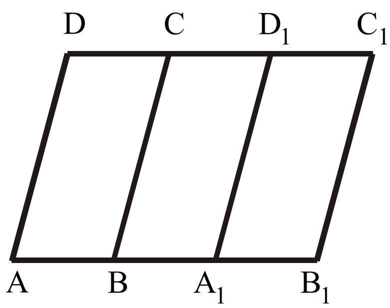
Hence ΔDAP and ΔCBQ are congruent and have equal areas.

So we can say ar(PQCD) = ar (AQCD) + ar(DAP)

= ar(AQCD) + ar(CBQ) = ar(ABCD)

You can verify by counting the squares of these parallelogram as drawn in the graph sheet.

Can you explain how to count full squares below half a square, above half a square on graph sheet.



Reshma argues that the parallelograms between same parallels need not have a common base for equal area. They only need to have an equal base. To understand her statement look at the adjacent figure.

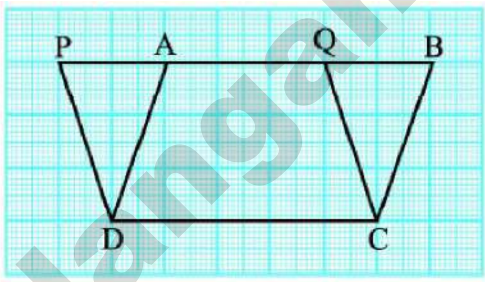
If AB = A_1B_1 When we cut out parallelogram $A_1B_1C_1D_1$ and place it over parallelogram ABCD, A would concide in with A_1 and B with B_1 and C_1, D_1 coincide with C, D. Thus these are equal

11.5 متوازی اضلاع جوایک ہی قاعدے اورمتوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں

اب ہم ان اشکال کے رقبوں کے درمیان تعلق پیدا کرنے کی کوشش کریں گے۔متوازی الاضلاع جوایک ہی قاعدے اورایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں۔آیئے اس تعلق کی جانچ کے لئے مندرجہ ذیل مشغلہ کریں۔

مشغلہ

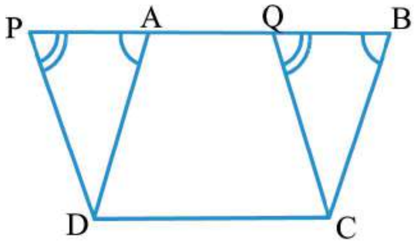
ایک گراف پیپر لیجئے اوردومتوازی الاضلاع ABCD اور PQCD کھینچیے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



یہ متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے DC اور ایک وہی متوازی خطوط کے جوڑ PB اور DC کے درمیان واقع ہیں۔شکل سے ظاہر ہے کہ DCQA دونوں متوازی الاضلاع مشترک حصہ ہے اگر ہم ΔDAP اور ΔCBQ کے رقبے مساوی ہیں ثابت کریں تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$ar(PQCD) = ar(ABCD)$$

مسئلہ 11.1: متوازی الاضلاع جوایک ہی قاعدے اوروہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔



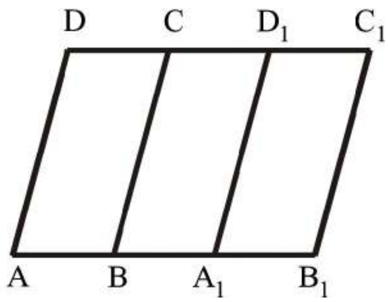
ثبوت : فرض کروکہ ABCD اور PQCD دومتوازی الاضلاع جوایک ہی قاعدے اورمتوازی خطوط DC اور PB کے درمیان واقع ہیں۔

ΔDAP اور ΔCBQ میں

$PD\|CQ$ اور PB قاطع خط سے $\angle DAP=\angle CBQ$ اور $AD\|CB$ اور PB قاطع خط $\angle DAP=\angle CBQ$ اس کے علاوہ $PD\|QC$ کیوں کہ PQCD متوازی الاضلاع ہے۔اس طرح ΔDAP اور ΔCBQ متماثل ہیں اوروہ مساوی رقبہ رکھتے ہیں۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$Ar(PQCD) = ar\ (AQCD) + ar\ (DAP)$$
$$= ar\ (AQCD)+ar(CBQ)=ar(ABCD)$$



گراف پیپر پر کھینچے گئے متوازی الاضلاع میں موجود مربعوں کوشمار کرتے ہوئے آپ جواب کی تصدیق کرسکتے ہیں۔

کیا آپ گراف پیپر پرشکل سے بننے والے مکمل مربعے آدھے سے کم،اورآدھے سے زیادہ والے مربعوں کوشمار کرنے کے اصولوں کی تشریح کرسکتے ہیں۔

حمیرہ اس بات پر بحث کرتی ہے کہ متوازی الاضلاع جوایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان ہوں۔مساوی رقبے کے لئے ایک ہی قاعدہ پرواقع ہونا ضروری ہے۔صرف ان کے قاعدوں کے طول مساوی ہونا چاہیئے۔ آیئے اب ہم حمیرہ کے بیان کے فہم کے لئے شکل دیکھیں۔

اگر $AB=A_1B_1$ جب میں متوازی الاضلاع $A_1B_1C_1D_1$ کو کاٹ کرمتوازی الاضلاع ABCD پر منطبق کرتے ہیں تب A نقطہ A_1 اور B نقطہ B_1 اور C_1, D_1 نقطہ C, D سے منطبق ہوتے ہیں۔اس طرح یہ متوازی اضلاع رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

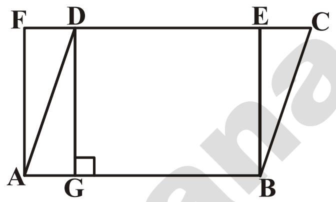
in area. Thus the parallelogram with the equal base can be considered to be on the same base for the purposes of studying their geometrical properties.

Let us now take some examples to illustrate the use of the above Theorem.

Example-1. ABCD is parallelogram and ABEF is a rectangle and DG is perpendicular on AB.

Prove that (i) ar (ABCD) = ar(ABEF)

(ii) ar (ABCD) = AB × DG



Solution : (i) A rectangle is also a parallelogram

$\therefore$ ar(ABCD) = ar(ABEF) ..... (1)

(Parallelograms lie on the same base and between the same parallels)

(ii) ar(ABCD) = ar(ABEF) ($\because$ from (1))

= AB × BE ($\because$ ABEF is a rectangle)

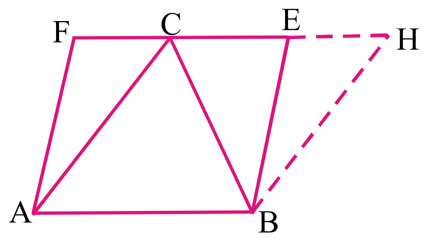
= AB × DG ($\because$ DG $\perp$ AB and DG = BE)

Therefore ar(ABCD) = AB × DG

From the result, we can say that "area of a parallelogram is the product of its any side and the corresponding altitude".

Example-2. Triangle ABC and parallelogram ABEF are on the same base, AB as in between the same parallels AB and EF. Prove that ar(ΔABC) = $\frac{1}{2}$ar(|| gm ABEF)

Solution : Through B draw BH || AC to meet FE produced at H



$\therefore$ ABHC is a parallelogram

Diagonal BC divides it into two congruent triangles

$\therefore$ ar(ΔABC) = ar(ΔBCH)

= $\frac{1}{2}$ar (|| gm ABHC)

But || gm ABHC and || gm ABEF are on the same base AB and between same parallels AB and EF

$\therefore$ ar(|| gm ABHC) = ar(|| gm ABEF)

Hence ar(ΔABC) = $\frac{1}{2}$ar (|| gm ABEF)

From the result, we say that "the area of a triangle is equal to half the area of the parallelogram on the same base and between the same parallels".

Example-3. Find the area of a figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a rhombus with diagonals 12 cm. and 16 cm.

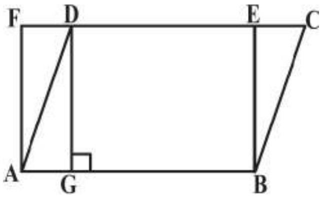
Solution : Join the mid points of AB, BC, CD, DA of a rhombus ABCD and name them M, N, O and P respectively to form a figure MNOP.

What is the shape of MNOP thus formed? Give reasons?

اسطرح اب جیومٹری اشکال کی خصوصیات کے فہم کے لئے مساوی قاعدے پر واقع متوازی الاضلاع کوایک ہی قاعدے پر واقع متوازی الاضلاع مساوی لیتے ہیں۔

آیئے اب ہم مندرجہ بالا مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ان مثالوں کی وضاحت کریں گے۔

مثال 1: ABCD ایک متوازی الاضلاع اور ABEF مستطیل ہے۔اور DG عمودوار ہے AB پر۔ثابت کیجئے کہ



(i) ar(ABCD)=ar(ABEF)

(ii) ar(ABCD)=ABxDG

حل: (i) ایک مستطیل بھی متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

ar(ABCD)=ar(ABEF)

(متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں)

(ii) ar(ABCD)=ar(ABEF)(fig(i))

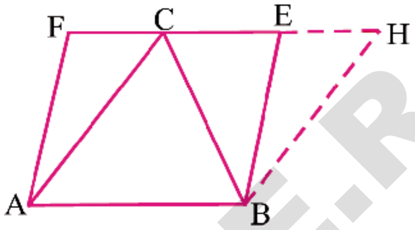
=ABxBE(ABEF مستطیل ہے)

$=AB\times DG(DG\perp AB$ اور DG=BE)

اس طرح Ar(ABCD)= ABxDG

مندرجہ بالا نتیجے سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ''متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدے اور متناظر بلندی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

مثال 2: مثلث ABC اور متوازی الاضلاع ABEF دونوں ایک ہی قاعدے AB اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ AB اور EF کے درمیان واقع ہیں۔ثابت کیجئے کہ



$$ar(\Delta ABC)=\frac{1}{2}ar(\|\,gm\ \ ABEF)$$

حل: راس B سے BH||AC کھینچے جو FE کو آگے بڑھانے پر H پر ملتے ہیں۔

یعنی ABHC متوازی الاضلاع ہے۔وتر BC اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

$$\therefore ar(\Delta ABC)=ar\,(\Delta BCH)$$

$=\frac{1}{2}ar(ABHC$ متوازی الاضلاع)

لیکن متوازی الاضلاع ABHC اور متوازی الاضلاع ABEF ایک ہی قاعدے AB اور وہی متوازی خطوط AB اور EF کے درمیان واقع ہیں۔

اوپر کے بیان سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ'' مثلث کا رقبہ نصف ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے رقبہ کے جبکہ دونوں ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

مثال 3: معین کے متصلہ ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے پر بننے والی شکل کا رقبہ معلوم کیجئے جسکے وتر 12cm اور 16cm ہیں۔

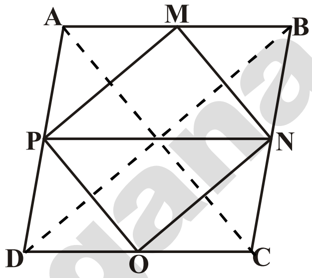
حل: معین ABCD کے ضلعوں AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط کو جوڑتے ہوئے ان نقاط کو M، N، O اور D سے ظاہر کیجئے۔جس سے شکل MNOP حاصل ہوتا ہے۔

تشکیل شدہ شکل MNOP شکل کونسی ہے؟ وجوہات بتلایئے۔

Join P, N, then PN || AB and PN || DC (How?)

We know that if a triangle and a parallelogram are on the same base and between the same parallels, the area of the triangle is equal to one-half area of the parallelogram.

From the above result parallelogram ABNP and triangle MNP are on the same base PN and in between same parallel lines PN and AB.



$\therefore$ ar $\Delta MNP = \frac{1}{2}$ ar ABPN .....(i)

Similarly ar $(\Delta PON) = \frac{1}{2}$ ar (PNCD).....(ii)

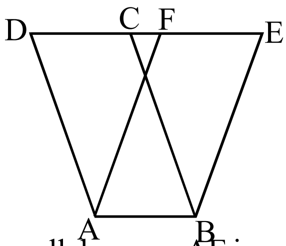
and Area of rhombus $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ .....(iii)

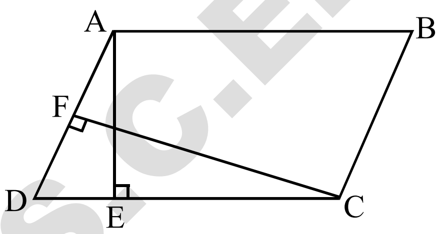
From (1), (ii) and (iii) we get

$$\begin{aligned} ar(MNOP) &= ar(\Delta MNP) + ar(\Delta PON) \\ &= \frac{1}{2} ar(ABNP) + \frac{1}{2} ar(PDCN) \\ &= \frac{1}{2} ar(\text{rhombus } ABCD) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48 \text{ cm.}^2 \end{aligned}$$

Exercise - 11.2

1. The area of parallelogram ABCD is 36 cm^2. Calculate the height of parallelogram ABEF if AB = 4.2 cm.

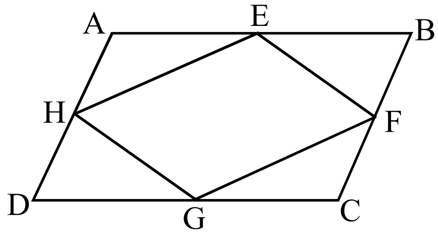




2. ABCD is a parallelogram. AE is perpendicular on DC and CF is perpendicular on AD.

   If AB = 10 cm, AE = 8 cm and CF = 12 cm. Find AD.

3. If E, F G and H are respectively the midpoints of the sides AB, BC, CD and AD of a parallelogram ABCD, show that ar(EFGH) $= \frac{1}{2}$ar(ABCD).

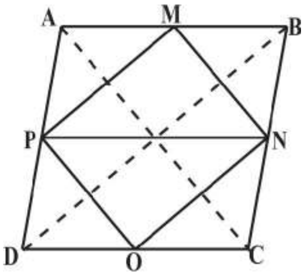


4. What type of quadrilateral do you get, if you join ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN and ΔMNB in the example 3.

خط PN کو جوڑئے تب PN||AB اور PN||PC (کیسے؟)

ہم جانتے ہیں کہ "اگر ایک مثلث اور ایک متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہوں تب مثلث کا رقبہ نصف ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے رقبے کے۔

مندرجہ بالا نتیجے سے متوازی الاضلاع ABNP اور مثلث MNP ایک ہی قاعدے PN اور ایک ہی متوازی خطوط PN اور AB کے درمیان واقع ہیں۔



$\therefore$ ar $\Delta MNP = \frac{1}{2}$ ar ABPN .... (i)

اسی طرح ar $\Delta PON = \frac{1}{2}$ ar PNCD .....(ii)

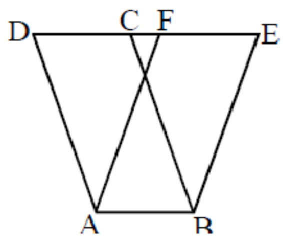
معین کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ .... (iii)

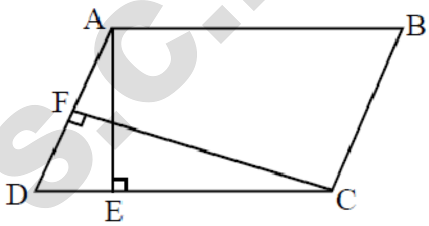
(i)(ii) اور (iii) کی مدد سے ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} ar(MNOP) &= ar(\Delta MNP) + ar(\Delta PON) \\ &= \frac{1}{2} ar(ABNP) + \frac{1}{2} ar(PDCN) \\ &= \frac{1}{2} ar \text{ معین } ABCD \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48 \text{ cm.}^2 \end{aligned}$$

مشق 11.2

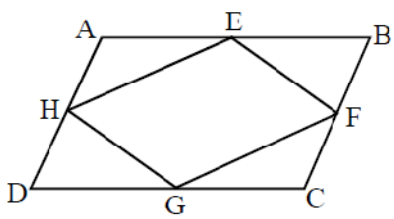
1. متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ $36cm^2$ ہے۔ اگر AB=4.2cm تب متوازی الاضلاع ABEF کی بلندی معلوم کیجئے۔



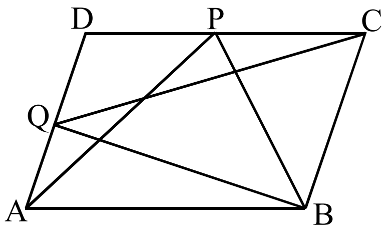


2. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AE ضلع DC پر اور CF ضلع AD پر عمود وار ہیں۔ اگر AB=10cm AE=8cm اور CF=12cm تب AD کا طول معلوم کیجئے۔

3. اگر E,F,G اور H ترتیب وار متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں AB، BC CD اور AD پر وسطی نقاط ہیں تو بتلائیے کہ

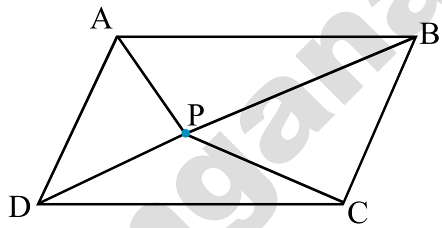


4. مثال 3 میں دی گئی شکل میں اگر آپ ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN اور ΔMNB کو جوڑتے ہیں تب آپ کو کونسی شکل حاصل ہوگی۔



5. P and Q are any two points lying on the sides DC and AD respectively of a parallelogram ABCD show that ar(ΔAPB) = ar Δ(BQC).

6. P is a point in the interior of a parallelogram ABCD. Show that

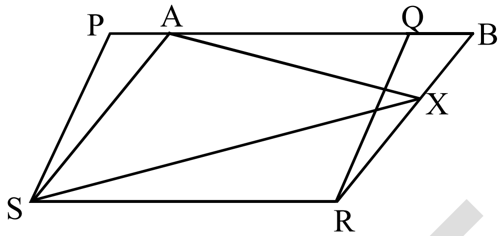


(i) $ar(\Delta APB) + ar(\Delta PCD) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

(ii) $ar(\Delta APD) + ar(\Delta PBC) = ar(\Delta APB) + ar(\Delta PCD)$

(Hint : Through P, draw a line parallel to AB)

7. Prove that the area of a trapezium is half the sum of the parallel sides multiplied by the distance between them.

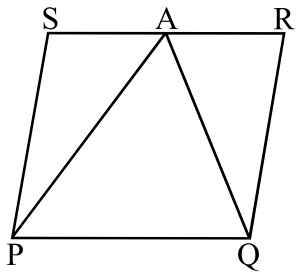


8. PQRS and ABRS are parallelograms and X is any point on the side BR. Show that

(i) ar(PQRS) = ar(ABRS)

(ii) $ar(\Delta AXS) = \frac{1}{2} ar(PQRS)$

9. A farmer has a field in the form of a parallelogram PQRS as shown in the figure. He took the mid- point A on RS and joined it to points P and Q. In how many parts of field is divided? What are the shapes of these parts ?

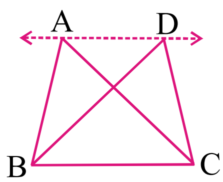


The farmer wants to sow groundnuts which are equal to the sum of pulses and paddy. How should he sow? State reasons?

10. Prove that the area of a rhombus is equal to half of the product of the diagonals.

11.6 TRIANGLES ON THE SAME BASE AND BETWEEN THE SAME PARALLELS

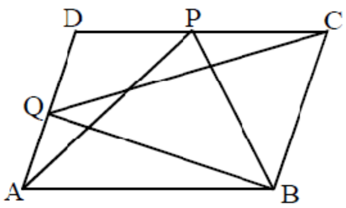
We are looking at figures that lie on the same base and between the same parallels. Let us have two triangles ABC and DBC on the same base BC and between the same parallels, AD and BC.



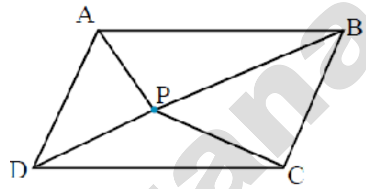
What can we say about the areas of such triangles? Clearly there can be infinite number of ways in which such pairs of triangle between the same parallels and on the same base can be drawn.

5. P اور Q کوئی دو نقاط متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں DC اور AD پر ترتیب وار لئے گئے ہیں۔ بتلائے کہ

ar(ΔAPB)=ar(ΔBQC)



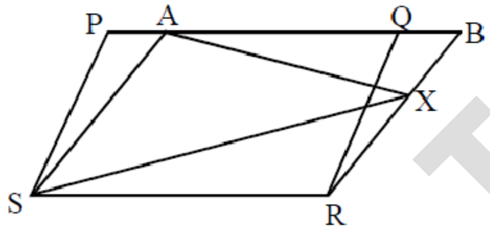
6. متوازی الاضلاع ABCD میں P کوئی اندرونی نقطہ ہے بتلائے کہ



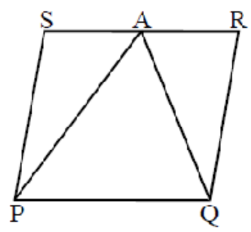
(اشارہ: نقطہ P سے ضلع AB کے متوازی خط کھینچئے)

7. ثابت کیجئے کہ منحرف کا رقبہ، متوازی ضلعوں کے مجموعے کے نصف اور ان کے درمیان کے فاصلے کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

8. PQRS اور ABRS متوازی الاضلاع ہیں اور X کوئی نقطہ پر ضلع BR پر۔ تب بتلایئے کہ



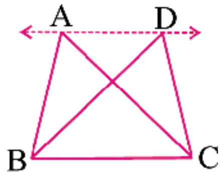
9. ایک کسان کا کھیت متوازی الاضلاع PQRS کی طرح ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے؟ وہ ضلع RS پر وسطی نقطہ A لیتے ہوئے اسکو P اور Q سے جوڑتا ہے۔ کھیت کو کتنے حصوں میں منقسم کیا گیا ہے؟ یہ حصے کن اشکال کی طرح ہیں؟
کسان کھیت میں دھان اور دال کی پیداوار کے مساوی مونگ پھلی اگانا چاہتا ہے۔ اسے پیداوار کس طرح حاصل ہوگی۔



10. ثابت کیجئے کہ معین کا رقبہ اس کے وتروں کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

11.6 مثلثات جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں

ہم متصلہ شکل میں دیکھتے ہیں کہ ایسے مثلثات جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔



آیئے ہم ان مثلثات کو ABC اور DBC جو ایک ہی قاعدے BC اور متوازی خطوط کے جوڑ AD اور BC کے درمیان ہیں ہم ان مثلثات کے رقبوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

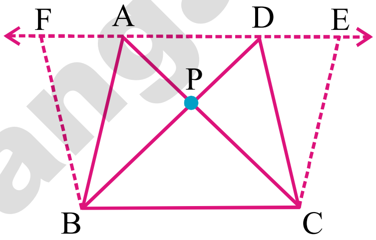
یہ بالکل عیاں ہے کہ اس طرح کے لامتناہی مثلثات کے جوڑ جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان کھینچے جاسکتے ہیں۔

Let us perform an activity.

Activity

Draw pairs of triangles one the same base or (equal bases) and between the same parallels on the graph sheet as shown in the Figure.

Let ΔABC and ΔDBC be the two triangles lying on the same base BC and between parallels BC and AD. Extend AD on either sides and draw CE || AB and BF || CD. Parallelograms AECB and FDCB are on the same base BC and are between the same parallels BC and EF.



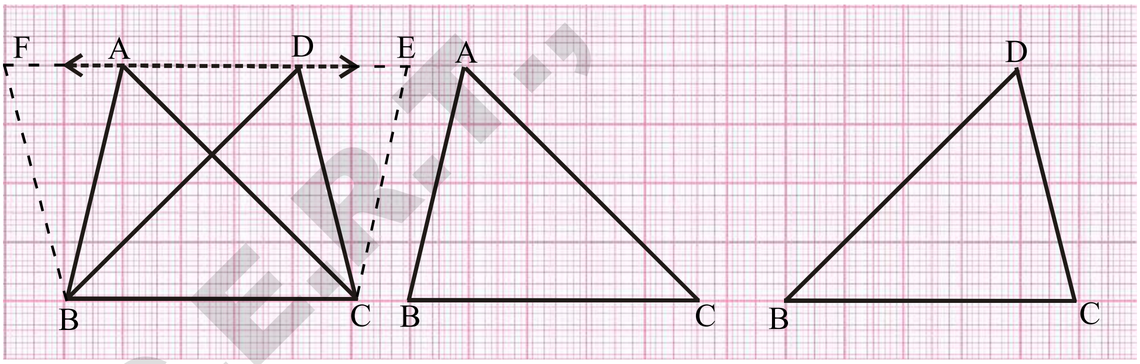
Thus ar(AECB) = ar(FDCB). (How ?)

We can see ar(ΔABC) = $\frac{1}{2}$ ar(Parallelogram AECB) ...(i)

and ar(ΔDBC) = $\frac{1}{2}$ ar(Parallelogram FDCB) .... (ii)

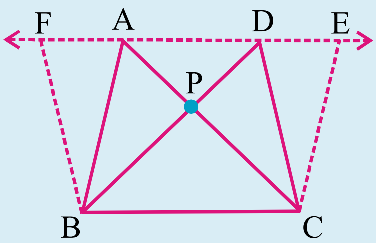
From (i) and (ii), we get ar(ΔABC) = ar(ΔDBC).

You can also find the areas of ΔABC and ΔDBC by the method of counting the squares in graph sheet as we have done in the earlier activity and check the areas are whether same.



Think, Discuss and write

Draw two triangles ABC and DBC on the same base and between the same parallels as shown in the figure with P as the point of intersection of AC and BD. Draw CE || BA and BF || CD such that E and F lie on line AD.



Can you show ar(ΔPAB) = ar(ΔPDC)?

(**Hint** : These triangles are not congruent but have equal areas.)

آیئے ایک مشغلہ کریں گے۔

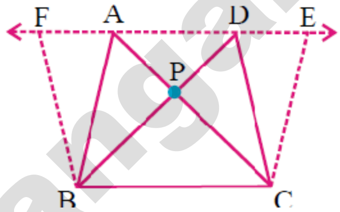
کوشش کیجئے

ایک گراف پیپر پر دو مثلثات کوایک ہی قاعدہ پراور وہی متوازی خطوط کے درمیان کھینچئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

اگر ΔABC اور ΔDBC دو مثلثات ہیں جو کہ ایک ہی قاعدہ BC اور دو متوازی خطوط BC اور AD کے درمیان واقع ہیں۔ AD کو دونوں جانب طول دیجیے اور $AB \| CE$ اور $BF \| CD$ کھینچئے۔متوازی الاضلاع AECB اور FDCB ایک ہی قاعدہ BC اور دو متوازی خطوط BC اور EF کے درمیان واقع ہیں۔ $ar(AECB) = ar(FDCB)$ (کیسے؟)

ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ

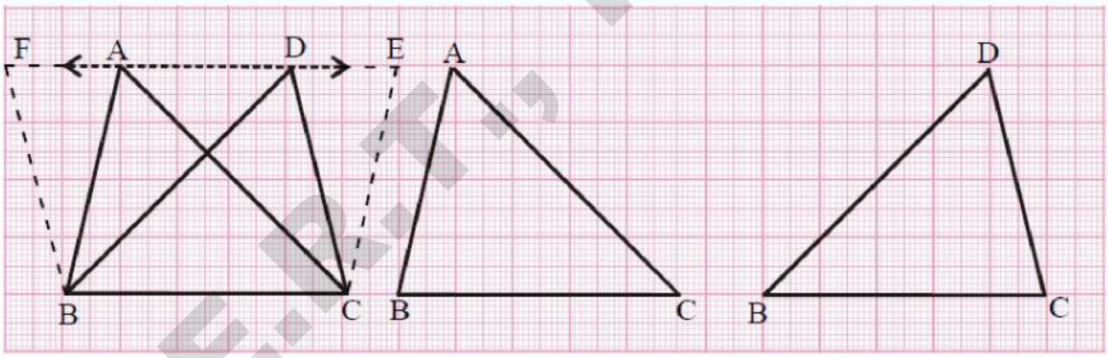
متوازی الاضلاع



مساوات (i) اور (ii) کی روسے ہمیں حاصل ہوتا ہے $ar(\Delta ABC)=ar(\Delta DBC)$

آپ ΔABC اور ΔDBC کے رقبے، ان میں موجود مربعوں کی گنتی کے طریقے سے بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

پچھلے مشغلہ میں ہم نے جو گراف پیپر پر مشغلہ کیا تھا جانچ کیجئے کہ آیا وہ رقبے مساوی ہیں۔

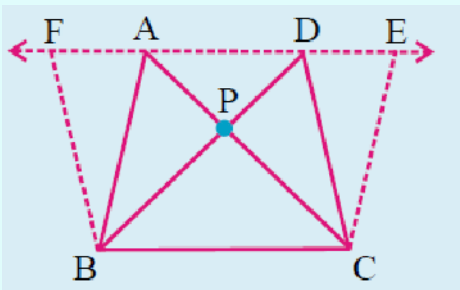


سوچئے بحث کیجئے اور لکھئے

دو متوازی خطوط کے درمیان ایک ہی قاعدہ پر دو مثلثات ABC اور DBC اس طرح بنائیے کہ ان کے دو ضلع AC اور BD کا نقطہ تقاطع P ہے۔ دو خطوط کھینچئے جو کہ $CE \| BA$ اور $BF \| CD$ اس طرح کہ نقطہ E اور F خط AD پر واقع ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں $ar(\Delta PBC)=ar(\Delta PBC)$

(اشارہ: یہ مثلثات متماثل نہیں ہیں لیکن دونوں کا رقبہ مساوی ہے)



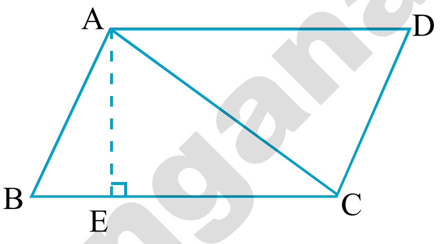
Corollary-1 : Show that the area of a triangle is half the product of its base (or any side) and the corresponding attitude (height).

Proof : Let ABC be a triangle. Draw AD || BC such that CD = BA.

Now ABCD is a parallelogram one of whose diagonals is AC.

We know $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

So $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta ACD)$ (Congruent triangles have equal area)



Therefore, $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

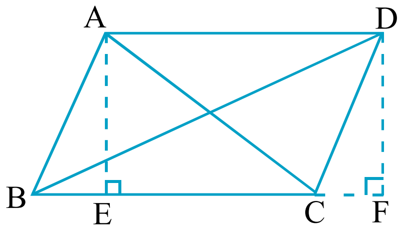
Draw $AE \perp BC$

We know $ar(ABCD) = BC \times AE$

We have $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(ABCD) = \frac{1}{2} \times BC \times AE$

So $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ base BC $\times$ Corresponding attitude AE.

Theorem-11.2 : Two triangles having the same base (or equal bases) and equal areas will lie between the same parallels.



Observe the figure. Name the triangles lying on the same base BC. What are the heights of ΔABC and ΔDBC?

If two triangles have equal area and equal base, what will be their heights? Are A and D collinear?

Let us now take some examples to illustrate the use of the above results.

Example 4. Show that the median of a triangle divides it into two triangles of equal areas.

Solution : Let ABC be a triangle and Let AD be one of its medians.

In ΔABD and ΔADC the vertex is common and these bases BD and DC are equal.

Draw $AE \perp BC$.

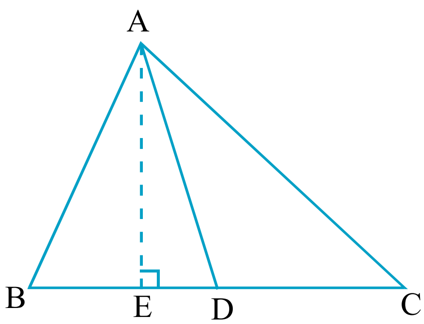
Now $ar(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times$ base BD $\times$ altitude of ΔADB

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

$= \frac{1}{2} \times$ base DC $\times$ altitude of ΔACD

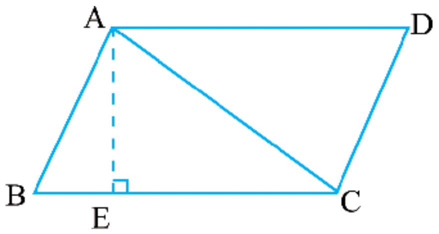
$= ar\,\Delta ACD$



Hence $ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$

ضمنی نتیجہ 1: ثابت کیجئے کہ مثلث کا رقبہ اس کے قاعدہ اور متعلقہ ارتفاع (بلندی) کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجئے کہ ABC ایک مثلث ہے $AD \parallel BC$ اس طرح کھینچئے کہ $CD=BA$ اب ہم کو ایک متوازی الاضلاع $ABCD$ حاصل ہوگا جس کا وتر AC ہے۔



ہم جانتے ہیں کہ $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

اسطرح $ar\Delta ABC \cong ar\Delta ACD$ (متماثل مثلثات مساوی رقبہ رکھتے ہیں)

اس لیئے $ar\Delta ABC=\frac{1}{2}\,ar(ABCD)$

BC پر ایک عمود AE اس طرح کھینچئے $AE \perp BC$

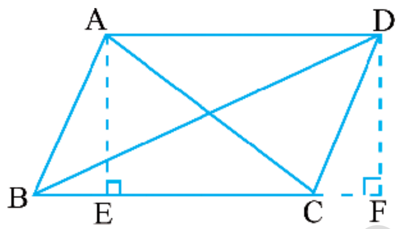
ہم جانتے ہیں $ar(ABCD)=BC \times AE$

ہم جانتے ہیں $ar(\Delta ABC)=\frac{1}{2}\,ar\,(ABCD)$

$\frac{1}{2} \times BC \times AE$

اسطرح $ar\Delta ABC=\frac{1}{2} \times BC$ قاعدہ $\times\ AE$ بلندی

مسئلہ 11.2: دو مثلثات جن کا ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدے ہو) اور مساوی رقبے رکھتے ہوں ہم متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔ شکل کا مشاہدہ کیجئے۔ ان مثلثات کے نام دیں جو ایک ہی قاعدہ BC پر واقع ہیں ΔABC اور ΔDBC کی بلندیاں کیا ہیں؟



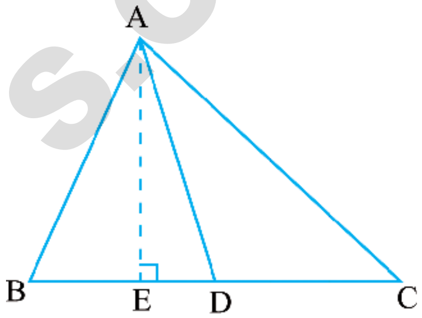
اگر دو مثلثات جن کا رقبہ مساوی ہے اور ایک ہی قاعدہ پر واقع ہیں۔ ان کی بلندیاں کیا ہوں گی؟ کیا A اور D ہم خط ہیں؟

آیئے مزید مثالیں لے کر اوپر دیئے گئے نتائج کی وضاحت کریں۔

مثال 4: ثابت کیجئے کہ ہر ایک مثلث کا وسطانیہ مثلث کو دو مساوی رقبوں کے مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

حل: فرض کیجئے مثلث ABC کا وسطانیہ AD ہے۔

ΔABD اور ΔADC میں ایک مشترک راس ہوتا ہے جن کے قاعدے BD اور DC مساوی ہوتے ہیں۔ $AE \perp BC$ کھینچئے۔



اب $ar\,(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $BD \times$ ΔADB کا ارتفاع

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

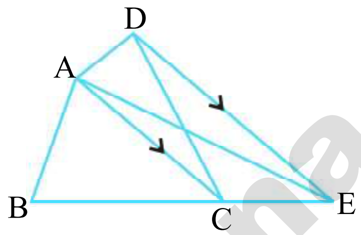
$= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $DC \times$ ΔACD کا ارتفاع

$= ar\,\Delta ACD$

$ar\,(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$

Example-5. In the figure, ABCD is a quadrilateral. AC is the diagonal and DE || AC and also DE meets BC produced at E. Show that ar(ABCD) = ar(ΔABE).

Solution : ar(ABCD) = ar(ΔABC) + ar(ΔDAC)



ΔDAC and ΔEAC lie on the same base $\overline{AC}$

and between the parallels DE || AC

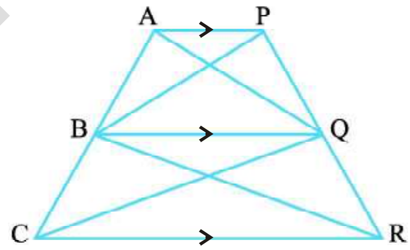
ar(ΔDAC) = ar(ΔEAC) (Why?)

Adding areas of same figures on both sides.

ar(ΔDAC) + ar(ΔABC) = ar(ΔEAC) + ar(ΔABC)

Hence ar(ABCD) = ar(ΔABE)

Example 6. In the figure, AP || BQ || CR. Prove that ar(ΔAQC) = ar(ΔPBR).



Solution : ΔABQ and Δ PBQ lie on the same base BQ and between the same parallels AP || BQ.

∴ ar(ΔABQ) = ar(ΔPBQ) ...(1)

Similarly,

ar (ΔCQB) = ar (ΔRQB) (same base BQ and BQ || CR) ...(2)

Adding results (1) and (2)

ar(ΔABQ) + ar(ΔCQB) = ar(ΔPBQ) + ar(ΔRQB)

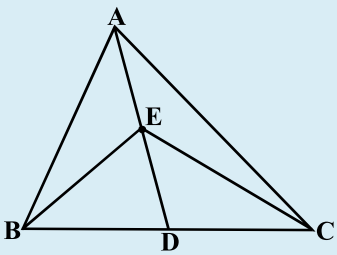
Hence ar(ΔAQC) = ar (ΔPBR)

Exercise - 11.3

1. In a triangle ABC (see figure), E is the midpoint of median AD, show that

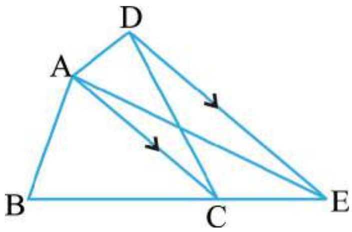
   (i) ar ΔABE = ar ΔACE

   (ii) arΔABE = $\frac{1}{4}$ar(ΔABC)



2. Show that the diagonals of a parallelogram divide it into four triangles of equal area.

مثال5: شکل ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ جہاں AC ایک وتر ہے اور DE||AC ہے۔ ضلع BC کو نقطہ E تک کھینچئے اس طرح کہ نقطہ E، DE اور BC کا مشترک راس ہو۔



بتائیے کہ $ar\,(ABCD) = ar(\Delta ABE)$

حل: $ar\,(ABCD) = ar(\Delta ABC) + ar\,(\Delta DAC)$

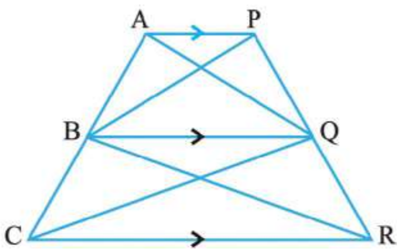
ΔDAC اور ΔEAC ایک ہی قاعدہ $\overline{AC}$ پر واقع ہیں۔ اور متوازی خطوط DE//AC کے درمیان واقع ہیں۔

$ar\,(\Delta DAC) = ar\,(\Delta EAC)$ (کیوں؟)

$$ar(\Delta DAC) + ar(\Delta ABC) = ar(\Delta EAC) + ar(\Delta ABC)$$

لہٰذا $ar(ABCD) = ar(\Delta ABE)$

مثال6: دی گئی شکل میں اگر AP//BQ//CR ہوں تو ثابت کیجئے کہ $ar(AQC)=ar(\Delta PBR)$



حل: ΔABQ اور ΔPBQ ایک ہی قاعدہ BQ پر واقع ہیں اور وہی متوازی خطوط AP//BQ کے درمیان واقع ہیں۔

$$ar(\Delta ABQ) = ar\,(\Delta PBQ)..........(1)$$

(ii) اسی طرح $ar(\Delta CQB)=ar\,(\Delta RQB)$ (BQ//CR اور قاعدہ BQ)

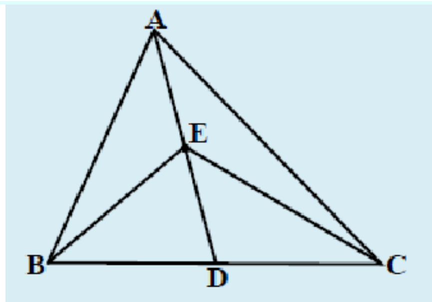
نتائج (i) اور (ii) کو جمع کرنے پر

$$ar(\Delta ABQ) + ar(\Delta CQB) = ar(\Delta PBQ) + ar(\Delta RQB)$$

$$ar\,\Delta AQC = ar\,\Delta PBR$$

مشق 1.1

1. ایک مثلث ABC (شکل کا مشاہدہ کیجئے) میں نقطہ E وسطانیہ AD کا وسطی نقطہ ہے۔ بتائیے کہ



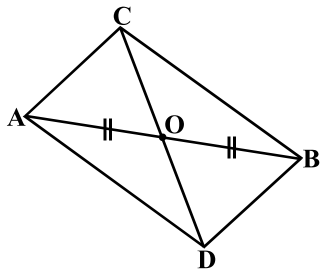
(i) $ar\,\Delta ABE = ar\,\Delta ACE$

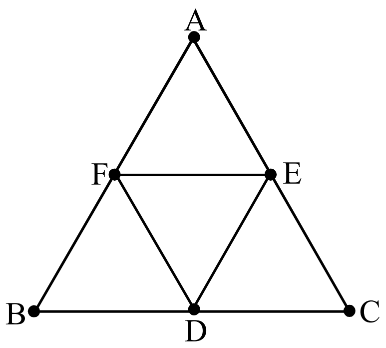
(ii) $ar\Delta ABE = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

2. بتائیے کہ ایک متوازی الاضلاع کے وتر اس کو چار مساوی رقبہ رکھنے والے مثلثات میں منقسم کرتے ہیں۔

3. In the figure, ΔABC and ΔABD are two triangles on the same base AB. If line segment CD is bisected by $\overline{AB}$ at O, show that

ar (ΔABC) = ar (ΔABD).





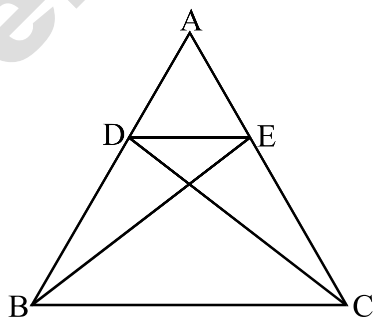
4. In the figure, ΔABC, D, E, F are the midpoints of sides BC, CA and AB respectively. Show that

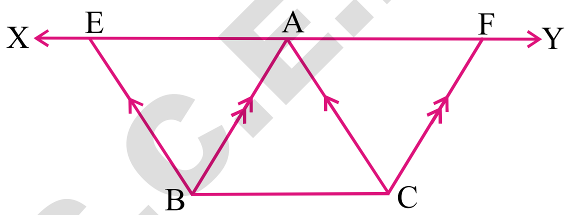
(i) BDEF is a parallelogram

(ii) ar(ΔDEF) = $\frac{1}{4}$ar(ΔABC)

(iii) ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ar(ΔABC)

5. In the figure D, E are points on the sides AB and AC respectively of ΔABC such that ar(ΔDBC) = ar(ΔEBC). Prove that DE || BC.

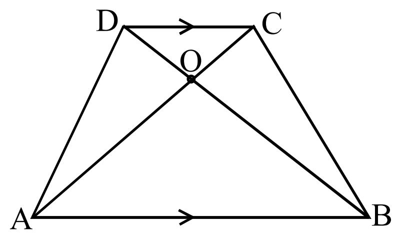




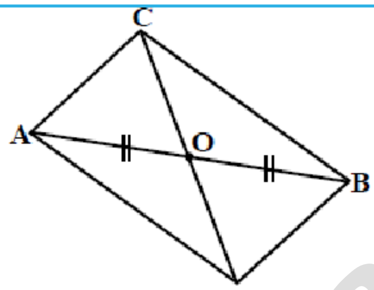
6. In the figure, XY is a line parallel to BC is drawn through A. If BE || CA and CF || BA are drawn to meet XY at E and F respectively. Show that ar(ΔABE) = ar (ΔACF).

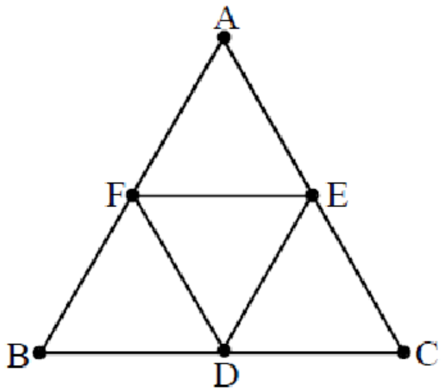
7. In the figure, diagonals AC and BD of a trapezium ABCD with AB || DC intersect each other at O. Prove that

ar(ΔAOD) = ar(ΔBOC).



3. دی گئی شکل میں دو مثلثات ΔABC اور ΔABD جو ایک ہی قاعدہ AB پر واقع ہیں۔ اگر ایک خطی قطعہ CD، AB کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔ تب بتائیے کہ $ar(\Delta ABC)=ar(\Delta ABD)$





4. دی گئی شکل کے تحت ΔABC میں ضلع BC، CA اور AB کے وسطی نقاط بالترتیب D، E، F ہیں۔ بتائیے کہ۔

BDEF ایک متوازی الاضلاع ہے

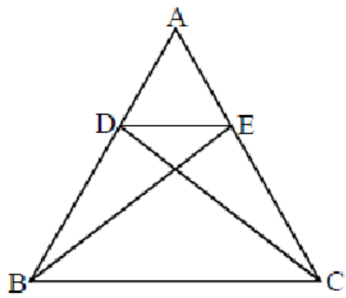
$$ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$$

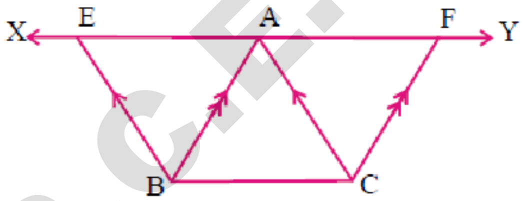
$$ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$$

5. دی گئی شکل میں اضلاع AB اور AC پر نقاط بالترتیب D اور E ہیں۔ اس طرح وہ ایک مثلث ΔABC بناتا ہے۔ اس طرح کہ

$ar(\Delta DBC) = ar(\Delta EBC)$

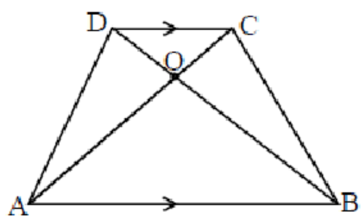
ثابت کیجئے $DE \parallel BC$

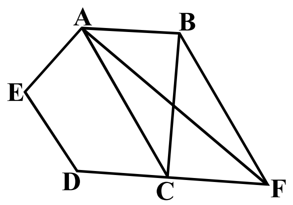




6. دی گئی شکل میں XY ایک متوازی خط ہے BC کا جو نقطہ A سے گذرتا ہے۔ اگر BE//CA اور CF//BA اس طرح کھینچیں جو بالترتیب E اور F سے گذر کر XY بناتا ہے ثابت کیجئے کہ $ar(\Delta ABE) = ar(\Delta ACF)$

7. دی گئی شکل میں منحرف ABCD میں وتر AC اور BD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اور $AB \parallel DC$ ثابت کیجئے کہ

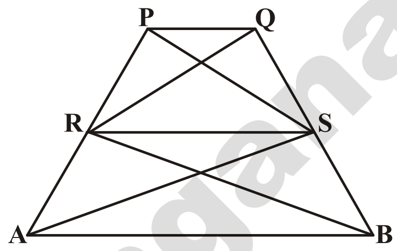




8. In the figure, ABCDE is a pentagon. A line through B parallel to AC meets DC produced at F. Show that

   (i) ar (ΔACB) = ar (ΔACF)

   (ii) ar (AEDF) = ar (ABCDE)

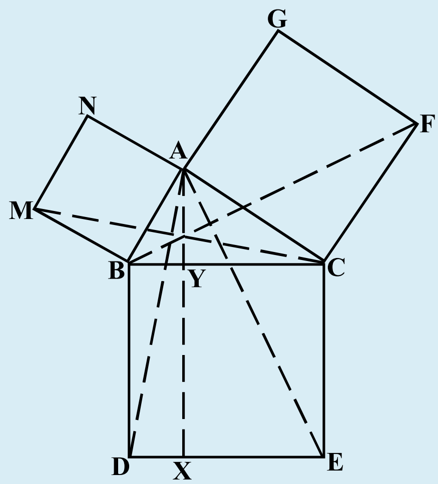


9. In the figure, if ar (ΔRAS) = ar (ΔRBS) and [ar (ΔQRB) = ar(ΔPAS) then show that both the quadrilaterals PQSR and RSBA are trapeziums.

10. A villager Ramayya has a plot of land in the shape of a quadrilateral. The grampanchayat of the village decided to take over some portion of his plot from one of the corners to construct a school. Ramayya agrees to the above proposal with the condition that he should be given equal amount of land in exchange of his land adjoining his plot so as to form a triangular plot. Explain how this proposal will be implemented. (Draw a rough sketch of plot).

Think, Discuss and Write

ABC is a right triangle right angled at A. BCED, ACFG and ABMN are squares on the sides BC, CA and AB respectively. Line segments AX $\perp$ DE meets BC at Y. and DE at X. Join AD, AE also BF and CM (See the figure).



Show that

(i) ΔMBC $\cong$ ΔABD

(ii) ar(BYXD) = 2ar (ΔMBC)

(iii) ar(BYXD) = ar(ABMN)

(iv) ΔFCB $\cong$ ΔACE

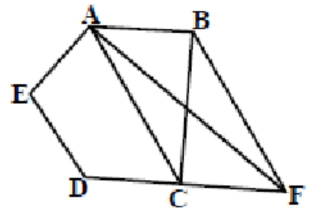
(v) ar(CYXE) = 2 ar(FCB)

(vi) ar(CYXE) = ar (ACFG)

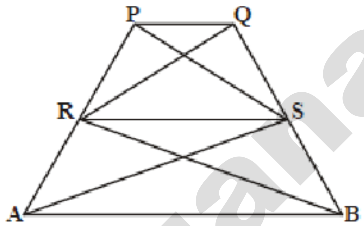
(vii) ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)

Can you write the result (vii) in words ? This is a famous theorem of Pythagoras. You shall learn a simpler proof in this theorem in class X.

8. دی گئی شکل میں ABCDE ایک مخمس ہے۔ ضلع DC کو F تک بڑھانے پر بننے والا ضلع BF متوازی ہوتا ہے AC کے۔



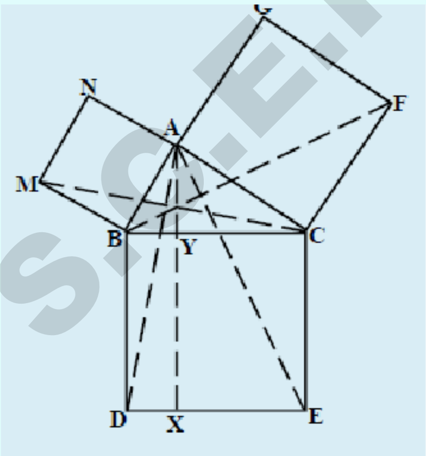
9. دی گئی شکل میں $ar\ \Delta RAS = ar\ \Delta RBS$ اور $ar(\Delta QRB) = ar(\Delta PAS)$ تب بتلائیے کہ دونوں چار ضلعی PQRS اور RSBA منحرف ہیں۔



10. رامیا کے پاس ایک چار ضلعی شکل کا پلاٹ ہے۔ گاؤں کی گرام پنچایت اُس پلاٹ کے ایک کونے میں اسکول قائم کرنا چاہتی ہے۔ رامیا اس بات پر راضی ہوگیا۔ لیکن شرط رکھی کہ اتنا ہی ٹکڑا بازو کے پلاٹ سے اس طرح دیا جائے کہ وہ ایک مثلث بن جائے۔ بتلائیے کہ یہ کس طرح ہوگا؟ (پلاٹ کا ایک کچا خاکہ بنائے)

سوچئے، گفتگو کیجیے اور لکھیے

مثلث ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جو A پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔ ضلع BC، CA اور AB پر ترتیب وار مربعے BCED، ACFG اور ABMN بنائے گئے ہیں۔ خطی قطعے $AX \perp DE$، خطی قطعے AE، ضلع BC پر Y کے مقام پر اور ضلع DE پر X کے مقام پر قطع کرتا ہے۔ AD، AE اور BF اور CM کو جوڑیئے اور بتلائیے کہ



(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$

(ii) $ar(BYXD) = 2ar(\Delta MBC)$

(iii) $ar(BYXD) = ar(ABMN)$

(iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) $ar(CYXE) = 2\ ar(FCB)$

(vi) $ar(CYXE) = ar(ACFG)$

(vii) $ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)$

کیا آپ (vii) کا نتیجہ اپنے الفاظ میں بیان کرسکتے ہیں؟ یہ فیثا غورث کا مشہور مسئلہ ہے۔ آپ اس کا آسان حل جماعت دہم میں پڑھیں گے۔

What have we discussed?

In this chapter we have discussed the following.

1. Area of a figure is a number (in some unit) associated with the part of the plane enclosed by that figure.
2. Two congruent figures have equal areas but the converse need not be true.
3. If X is a planar region formed by two non-overlapping planar regions of figures P and Q, then ar(X) = ar(P) + ar(Q)
4. Two figures are said to be on the same base and between the same parallels, if they have a common base (side) and the vertices (on the vertex) opposite to the common base of each figure lie on a line parallel to the base.
5. Parallelograms on the same base (or equal bases) and between the same parallels are equal in area.
6. Area of a parallelogram is the product of its base and the corresponding altitude.
7. Parallelogram on the same base (or equal bases) and having equal areas lie between the same parallels.
8. If a parallelogram and a triangle are on the same base and between the same parallels, then area of the triangle is half the area of the parallelogram.
9. Triangles on the same base (or equal bases) and between the same parallels are equal in area.
10. Triangles on the same base (or equal bases) and having equal areas lie between the same

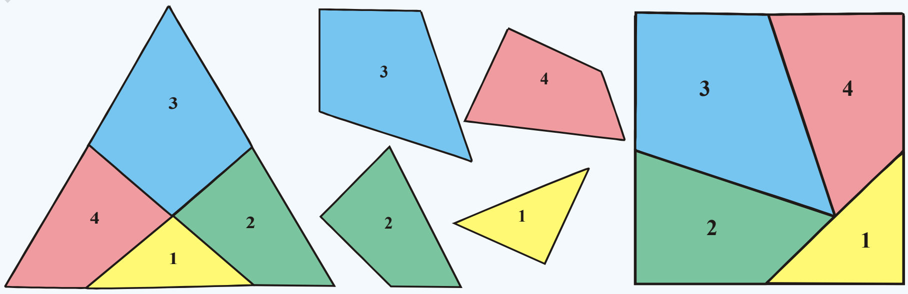
E9C1Q3

Do You Know?

A Puzzle (Areas)

German mathematician David Hilbert (1862-1943) first proved that any polygon can be transformed into any other polygon of equal area by cutting it into a finite number of pieces.

Let us see how an English puzzlist, Henry Ernest Dudency (1847 - 1930) transforms an equilateral triangle into a square by cutting it into four pieces.



Try to make some more puzzles using his ideas and enjoy.

ہم نے کیا سیکھا؟

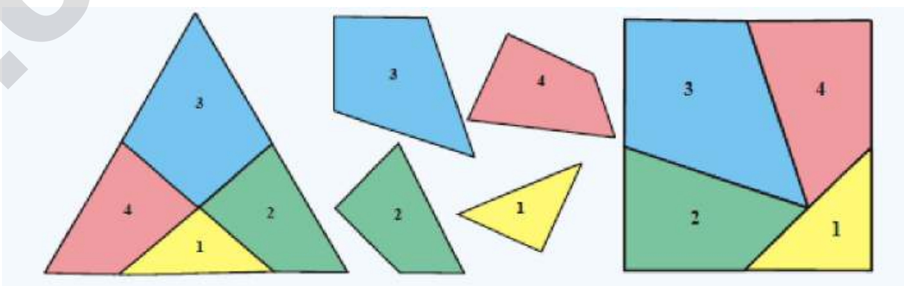
اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات پر غور کیا۔

1. کسی شکل کا رقبہ عدد ہوتا ہے (جو کسی اکائی رقبہ کے ساتھ لی گئی مقدار ہے) جو ایک بند مستوی شکل سے منسلک ہوتا ہے۔
2. دو متماثل اشکال کا مساوی رقبہ ہوسکتا ہے لیکن اس کا برعکس صادق نہیں ہوتا۔
3. اگر X ایک مستوی خطہ جو دو غیر منطبق مستویوں P اور Q سے تشکیل پاتا ہے تب $ar(X)=ar(P)+ar(Q)$
4. دو اشکال ایک ہی قاعدہ اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں گے جب کہ ان کا ایک مشترک قاعدہ ہو اور قاعدہ کے متوازی راس اُن متوازی خطوط کی جوڑ پر پائے جائیں۔
5. متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔
6. ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ مساوی ہوتا ہے قاعدہ اور اُس کے متناظر بلندی کے حاصل ضرب کے۔
7. متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور رقبہ میں مساوی ہوں تب وہ ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہوں گے۔
8. اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک مثلث ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں تب مثلث کا رقبہ مساوی ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے آدھے رقبے کے۔
9. مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔
10. مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور مساوی رقبہ رکھتے ہوں وہ ایک ہی متوازی خطوط کی جوڑ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

جرمنی کا ایک ریاضی داں ڈیوڈ ہلبرڈ (1862-1943) نے پہلی بار ثابت کیا کہ کسی بھی کثیر ضلعی کو کسی اور کثیر ضلعی میں منتقل کر سکتے ہیں جس کا رقبہ مساوی ہو جب کہ اس کو متناہی حصوں میں کاٹا جائے۔

آیئے دیکھیں کہ کس طرح ایک انگریزی معمہ کار رہنری اونسٹ ڈوڈنی (1847-1930) نے ایک مساوی الاضلاع کو چار حصوں میں کاٹ کر اُس کو ایک مربع میں منتقل کیا



اس کے ہنر کو استعمال کرتے ہوئے اور معمہ بنانے کی کوشش کیجئے۔

Chapter 12

Circles

H8H8W2

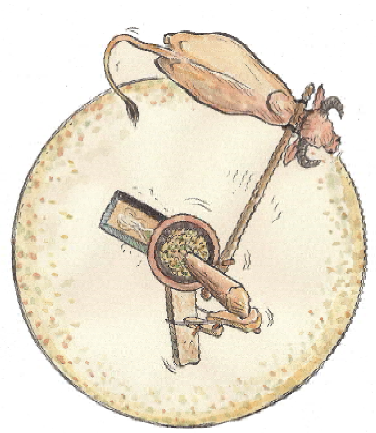
12.1 Introduction

We come across many round shaped objects in our surroundings such as coins, bangles, clocks, wheels, buttons etc. All these are circular in shape.

You might have drawn an outline along the edges of a coin, a bangle, a button in your childhood to form a circle.

So, can you tell, the difference between the circular objects and the circles you have drawn with the help of these objects?

All the circular objects we have observed above have thickness and are 3-dimensional objects, where as, a circle is a 2-dimensional figure, with no thickness.



Let us take another example of a circle. You might have seen the oil press called oil mill (Spanish wheel - in Telugu known as ganuga). In the figure, a bullock is tied to fulcrum fixed at a point. Can you identify the shape of the path in which the bullock is moving? It is circular in shape.

A line along the boundary made by the bullock is a circle. The oil press is attached to the ground at a fixed point, which is the centre of the circle. The length of the fulcrum with reference to the circle is radius of the circle. Think of some other examples from your daily life about circles.

In this chapter we will study circles, related terms and properties of the circle. Before this, you must know how to draw a circle with the help of a compass.

باب
12

دائرے

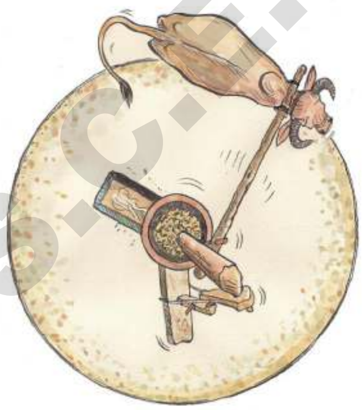
12.1 تعارف

روزمرہ زندگی میں ہم گول اشیاء جیسے سکے، چوڑیاں گھڑیاں، پہیئے، بٹن وغیرہ دیکھتے ہیں۔ یہ تمام دائروی شکل کی اشیاء ہیں۔

آپ نے بچپن میں کبھی سکے، چوڑی یا پھر بٹن کے اطراف لکیر کھینچ کر دائرہ بنایا ہوگا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ گول دائروی اشیاء اور اُن دائروں میں جو کہ آپ نے کبھی اتارے تھے کیا فرق ہے؟

یہ دائروی چیزیں جن کی اشکال دکھائی گئی ہیں کچھ موٹائی رکھتی ہیں یہ سہ ابعادی اشیاء ہیں جب کہ دائرہ دو ابعادی شکل رکھتا ہے۔ دائرے کی کوئی موٹائی نہیں ہوتی۔

دائرے کو ایک اور مثال سے سمجھتے ہیں۔ آپ نے موٹھ دیکھی ہوگی۔ موٹھ میں ایک بیل کو ایک ڈنڈے کے ذریعہ مرکز سے باندھ دیا جاتا ہے۔ اب بیل کو موٹھ پر چلایا جاتا ہے بتائیے کہ بیل کس راستہ پر چلے گا؟ یہ راستہ دائروی راستہ کہلاتا ہے۔



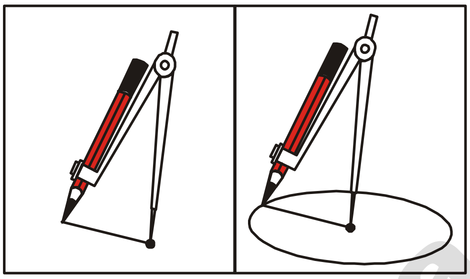
موٹھ کی حد پر بیل کا راستہ دائرہ ہوگا اس طریقہ کار میں جس ڈنڈے کے اطراف بیل کو چلایا جاتا ہے یہ دائرے کا مرکز کہلاتا ہے۔ مرکز سے جس فاصلے پر بیل ہوتا ہے اسے دائرے کا نصف قطر کہتے ہیں

روزمرہ زندگی میں آپ دائرے کی چند اور مثالیں دیجئے۔

اس باب میں ہم دائرہ اور اس کی خصوصیات کے علاوہ اس سے متعلقہ امور کا مطالعہ کریں گے۔ اس سے پہلے آپ پرکار کی مدد سے دائرہ بنانا سیکھنا ہوگا۔

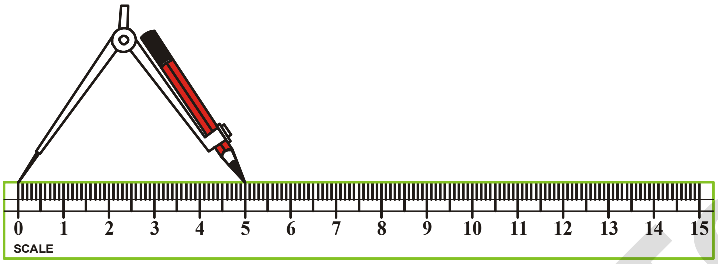
آیئے دائرہ بناتے ہیں

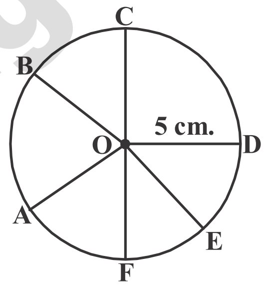
Insert a pencil in the pencil holder of the compass and tighten the screw. Mark a point 'O' on the drawing paper. Fix the sharp point of the compass on 'O'. Keeping the point of the compass firmly move the pencil round on the paper to draw the circle as shown in the figure.



If we need to draw a circle of given radius, we do this with the help of a scale.

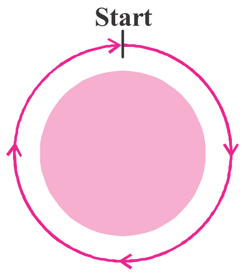
Adjust the distance between the sharp point of the compass and tip of the pencil equal to the length of the given radius, mark a point 'O'(radius of the circle in the figure is 5 cm.) and draw circle as described above.





Mark any 6 points A, B, C, D E and F on the circle. You can see that the length of each line segment OA, OB, OC, OD, OE and OF is 5 cm., which is equal to the given radius. Mark some other points on the circle and measure their distances from the point 'O'. What have you observed? We can say that a circle is a collection of all the points in a plane which are at a fixed distance from a fixed point on the plane.

The fixed point 'O' is called the centre of the circle and the fixed distance OA, is called the **radius** of the circle.



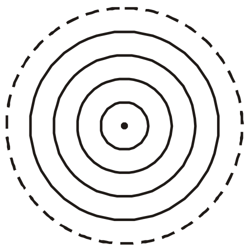
In a circular park Narsimha started walking from a point around the park and completed one round. What do you call the distance covered by Narsimha? It is the total length of the boundary of the circular park, and is called the circumference of the park.

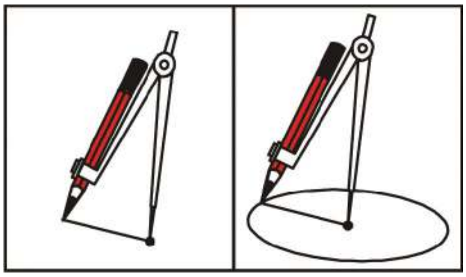
So, the complete length of a circle is called its **circumference**.

Activity

Let us now do the following activity. Mark a point on a sheet of paper. Taking this point as centre draw a circle with any radius. Now increase or decrease the radius and again draw some more circles with the same centre. What do you call the circles obtained in this activity?

Circles having same centre with different radii are called **concentric circles**.

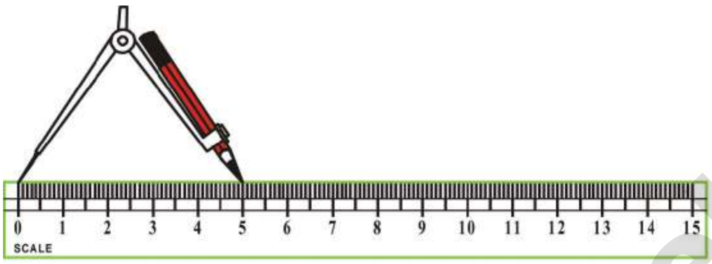


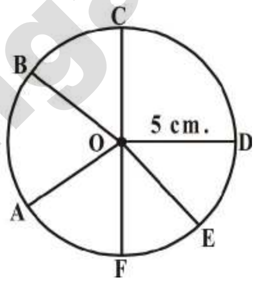


پرکار کے ہولڈر میں پنسل داخل کرتے ہوئے اسکرو کی مدد سے اسے کس دیجئے۔ ڈرائینگ کے کاغذ پر ایک نقطہ 'O' کا تعین کیجئے۔ پرکار کی سوئی نقطہ O پر رکھئے سوئی کو 'O' پر رکھ کر پنسل کو کاغذ پر اس طرح گھمایئے کہ دائرہ حاصل ہو اس عمل کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

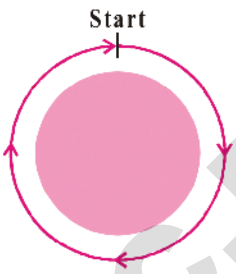
اگر ہمیں دیئے ہوئے نصف قطر کا دائرہ کھینچنا ہو تو ہمیں اسکیل بھی استعمال کرنا ہوگا۔

اس کے لئے پرکار کی سوئی اسکیل کے صفری درجہ پر رکھ کر مطلوبہ نصف قطر کا فاصلہ پنسل کے سرے سے لیجئے پنسل کا سرا اور سوئی کے درمیان کا فاصلہ نصف قطر ہوگا۔ O کو مرکز مان کر مذکورہ طریقہ کے مطابق دائرہ کھینچئے (یہاں دائرہ کا نصف قطر 5 سمر دیا گیا ہے)





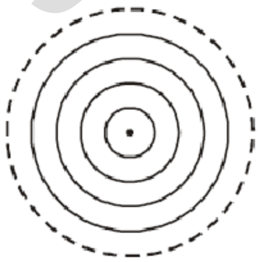
اس دائرے پر A، B، C، D، E اور F کوئی چھ نقاط لیجئے آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک خطی قطعہ OA، OB، OC، OD، OE، اور OF کا فاصلہ 5 سمر ہوگا جو کہ دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اسی طرح دائرے پر چند اور نقاط مختلف مقامات پر لیتے ہوئے O سے فاصلہ محسوب کریں۔ آپ نے کیا دیکھا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی مستوی میں دائرہ نقاط کا وہ سیٹ ہے جو اس مستوی پر ایک مستقل نقطہ O سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔



اس مستقل نقطہ O کو دائرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ OA کو دائرہ کا نصف قطر کہتے ہیں۔ ایک دائروی باغیچہ میں ارشد نے ایک مقام سے چلنا شروع کیا اور گول گھومتے ہوئے ایک چکر مکمل کیا ایک چکر کے فاصلہ کو کیا کہا جائے گا؟ یہ دراصل دائروی باغیچہ کے احاطہ کا فاصلہ ہوگا اور اسے دائرے کا محیط کہیں گے۔

لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ دائرے کے حدود کے اطراف کا مکمل فاصلہ محیط ہوتا ہے۔

عملی کام

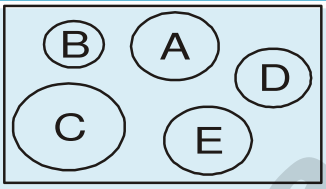


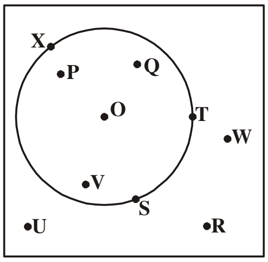
آیئے ہم ایک عملی کام کرتے ہیں۔ ایک کاغذ پر نقطہ متعین کیجئے۔ اس نقطہ کو مرکز مان کر کسی موزوں نصف قطر سے دائرہ کھینچئے۔ اب نصف قطر میں کمی کرتے ہوئے اس مرکز سے چند اور دائرے کھینچئے۔ اس عملی کام کے دوران حاصل ہونے والے دائروں کو آپ کیا کہیں گے؟

ایسے دائروے جن کا مرکز ایک ہی ہوتا ہے ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

Do This

1. In the figure, which circles are congruent to the circle A?
2. What measure of the circles make them congruent?





A circle divides the plane on which it lies into three parts. They are (i) inside the circle, which is also called interior of the circle; (ii) on the circle, this is also called the circumference and (iii) outside the circle, which is also called the exterior of the circle. From the above figure, find the points which are inside, outside and on the circle.

The circle and its interior make up the circular region.

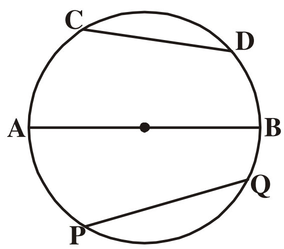
Activity

Take a thin circular sheet and fold it to half and open. Again fold it along any other half and open. Repeat this activity for several times. Finally when you open it, what do you observe?

You observe that all creases (traces of the folds) are intersecting at one point. Do you remember what do we call this point? This is the centre of the circle.

Measure the length of each crease of a circle with a divider. What do you notice ? They are all equal and each crease is dividing the circle into two equal halves. That crease is called diameter of circle. Diameter of a circle is twice its radius. A line segment joining any two points on the circle that passes through the centre is called the **diameter**.

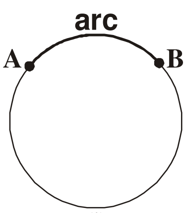
In the above activity if we fold the paper in any manner not only in half, we see that creases joining two points on circle. These creases are called chords of the circle.



So, a line segment joining any two points on the circle is called a **chord.**

What do you call the longest chord? Does it pass through the centre?

See in the figure, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ and $\overline{PQ}$ are chords of the circle.

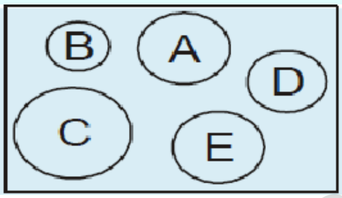


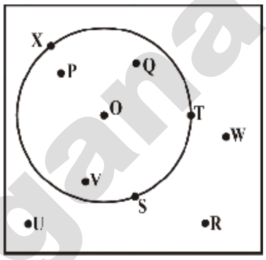
(i)

In the fig.(i), two points A and B are on the circle and they are dividing the circumference of the circle into two parts. The part of the circle between any two points on it is called an arc. In the fig.(i) AB is called an 'arc' and it is denoted by $\overset{\frown}{AB}$. If the end points of

یہ کیجیے

1. دیئے ہوئے دائروں میں کونسا دائرہ، دائرہ A کے مماثل ہے۔
2. کس وجہ سے دائرے مماثل ہوں گے؟





ایک دائرہ کسی مستوی کو تین حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ یہ تین حصے (i) اندرون دائرہ (ii) دائرہ پر کا حصہ یعنی دائرے کا محیط (iii) بیرون دائرہ ہوتے ہیں۔ دی ہوئی شکل کی مدد سے بتایئے کہ دیئے ہوئے نقاط آیا دائرہ کے اندر ہیں یا باہر یا پھر دائرہ پر ہیں۔

دائرہ اور اس کا اندرونی حصہ دائروی علاقہ کہلاتا ہے۔

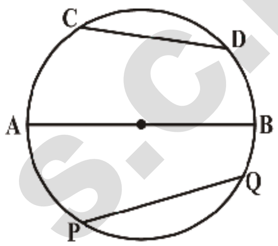
مشغلہ

ایک دائروی کاغذ لے کر برابر آدھا موڑیئے اور پھر کھول دیجئے، دوسرے حصہ سے آدھا موڑ کر کھول کر دیکھئے ایسا کئی مرتبہ کیجئے۔ بالآخر جب آپ اس کاغذ کو کھولیں گے تو بتایئے کہ کیا مشاہدہ کریں گے۔

آپ دیکھیں گے کہ تمام سلوٹیں ایک ہی نقطہ سے گزر رہی ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس نقطہ کو کیا کہا جاتا ہے؟ اسے دائرہ کا مرکز کہتے ہیں

پرکار کی مدد سے ہر ایک سلوٹ کی لمبائی محسوب کیجئے۔ آپ نے کیا دیکھا؟ یہ تمام مساوی ہیں اور ان میں سے ہر ایک سلوٹ دائرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ اس کو دائرے کے قطر کہتے ہیں۔ ایک دائرہ کا قطر اس کے نصف قطر کا دوگنا ہوتا ہے۔ لہٰذا ایسا خطی قطعہ جو دائرے کے دو نقاط کو ملاتے ہوئے مرکز پر سے گزرتا ہے قطر کہلاتا ہے۔

اوپر کے مشغلہ میں اگر ہم برابر آدھا نہ موڑتے ہوئے کوئی اور طریقے سے موڑیں تو ہم مشاہدہ کرنے میں کہ سلوٹیں دائرہ کو دو نقاط سے گزر رہی ہیں۔ یہ سلوٹیں دائرہ کا وتر کہلاتی ہیں۔

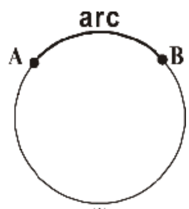


لہٰذا وہ خطی خط جو دائرے کے کوئی دو نقاط کو ملاتا ہے وتر کہلاتا ہے۔

بتایئے سب سے لمبے وتر کو کیا کہا جاتا ہے؟ کیا یہ مرکز پر سے گزرتا ہے؟

شکل دیکھئے کہ AB، CD، اور PQ دائرے کے وتر ہیں۔

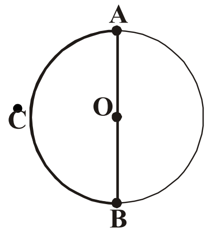
شکل (i) میں دو نقاط A اور B دائرے پر واقع ہیں اور یہ نقاط دائرے کے محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ کوئی دو نقاط کے دائرے کے کسی حصہ کو قوس کہا جاتا ہے، شکل (i) میں AB کو قوس کہا جاتا ہے اور اسے $\widehat{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں اگر دائرے کی قوس میں کوئی دو نقاط کسی قطر کے بیرون ترین نقاط ہوں تو ایسی کسی قوس کو نیم دائروی قوس یا نیم دائرہ کہتے ہیں شکل (ii) میں $\widehat{ACB}$ ایک نیم دائرہ ہے۔



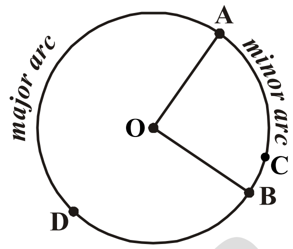
(i)

an arc become the end points of a diameter then such an arc is called a semicircular arc or a semicircle. In the fig.(ii) $\overset{\frown}{ACB}$ is a semicircle

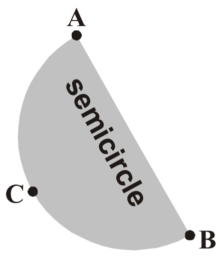
If the arc is smaller than a semicircle, then the arc is called a minor arc and if the arc is longer than a semicircle, then the arc is called a major arc. In the fig.(iii) $\overset{\frown}{ACB}$ is a minor arc and $\overset{\frown}{ADB}$ is a major arc.

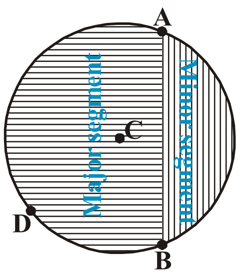


(ii)

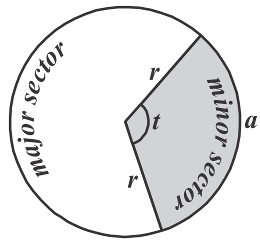


(iii)





If we join the end points of an arc by a chord, the chord divides the circle into two parts. The region between the chord and the minor arc is called the **minor segment** and the region between the chord and the major arc is called the **major segment**. If the chord happens to be a diameter, then the diameter divides the circle into two equal segments.



The region enclosed by an arc and the two radii joining the centre to the end points of an arc is called a ***sector***. One is minor sector and another is major sector (see adjacent figure).

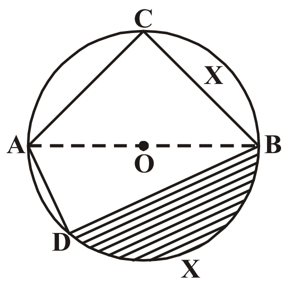
Exercise -12.1

1. Name the following parts from the adjacent figure where 'O' is the centre of the circle.

   (i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\overset{\frown}{BC}$

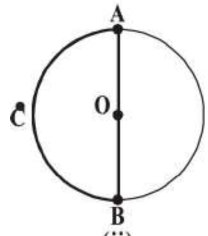
   (iv) $\overline{AC}$ (v) $\overset{\frown}{DCB}$ (vi) $\overset{\frown}{ACB}$

   (vii) $\overline{AD}$ (viii) shaded region

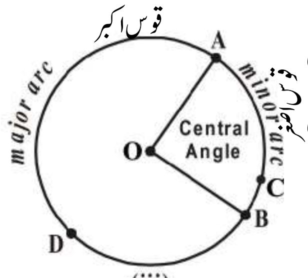


2. State true or false.

   i. A circle divides the plane on which it lies into three parts. ( )
   ii. The region enclosed by a chord and the minor arc is minor segment. ( )
   iii. The region enclosed by a chord and the major arc is major segment. ( )
   iv. A diameter divides the circle into two unequal parts. ( )
   v. A sector is the area enclosed by two radii and a chord ( )
   vi. The longest of all chords of a circle is called a diameter. ( )
   vii. The mid point of any diameter of a circle is the centre. ( )

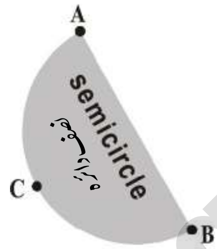


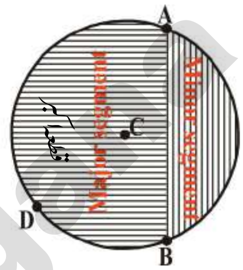
(ii)



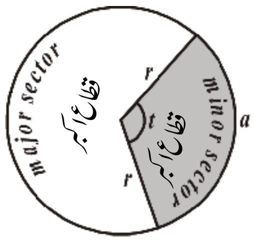
(iii)

اگر قوس نیم دائرہ سے کم ہوتو قوس اصغر اور نصف دائرہ سے بڑی ہوتو قوس اکبر کہتے ہیں۔شکل (iii) میں قوس $\widehat{ACB}$ قوس اصغر اور قوس $\widehat{ADB}$ قوس اکبر کہلائے گی۔



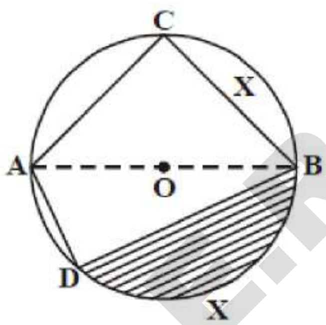


اگر کسی قوس کے کناروں کو کسی وتر سے جوڑ دیا جائے تو وتر دائرہ کو دو حصوں میں تقسیم کرے گا وہ علاقہ جو اس وتر اور قوس اصغر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اصغر اور وہ علاقہ جو قوس اکبر اور وتر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اکبر کہلائے گا۔ اگر وتر، قطر واقع ہوتو قطر دائرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرے گا۔



دائرے کا وہ علاقہ جو کسی قوس اور دو نصف قطروں سے گھرا ہوتا ہے قطاع کہلاتا ہے، متصل شکل ملاحظہ کیجئے۔ اس شکل میں ایک قطاع اصغر اور دوسرا قطاع اکبر دکھایا گیا ہے۔

مشق 12.1



1. دی ہوئی شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے، حسب ذیل حصوں کے نام لکھئے۔

(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\widehat{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) $\widehat{DCB}$ (vi) $\widehat{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ (viii) سایہ دار حصہ

2. دیئے گئے بیانات صادق ہیں یا کاذب بتلائیے۔

(i) ایک دائرہ اس مستوی کو جس پر وہ واقع ہے تین حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ (   )

(ii) وہ بند علاقہ جو کسی وتر اور قوس اصغر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اصغر کہلاتا ہے۔ (   )

(iii) وہ بند علاقہ جو کسی وتر اور قوس اکبر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اکبر کہلاتا ہے۔ (   )

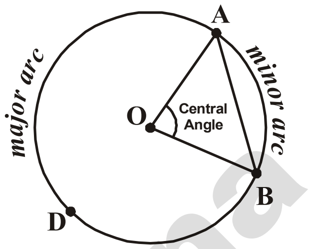
(iv) ایک قطر کسی دائرے کو دو غیر مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ (   )

(v) ایک قطاع وہ حصہ ہے جو ایک قوس اور دو نصف قطروں سے ملکر بنتا ہے۔ (   )

(vi) دائرے میں سب سے بڑا وتر، قطر کہلاتا ہے۔ (   )

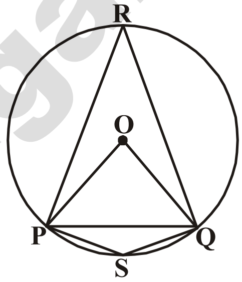
(vii) قطر کا نقطۂ وسطی دائرہ کا مرکز ہوتا ہے۔ (   )

12.2 ANGLE SUBTENDED BY A CHORD AT A POINT ON THE CIRCLE



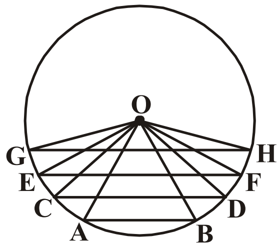
Let A, B be any two points on a circle with centre 'O'. Join A,O and B,O. Angle is made at centre 'O' by $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ i.e. $\angle AOB$ is called the angle subtended by the chord $\overline{AB}$ at the centre 'O'.

What do you call the angles $\angle POQ$, $\angle PSQ$ and $\angle PRQ$ in the figure?



i. $\angle POQ$ is the angle subtended by the chord $\overline{PQ}$ at the centre 'O'

ii. $\angle PSQ$ and $\angle PRQ$ are respectively the angles subtended by the chord PQ at point S and point R on the minor and major arc.



In the figure, O is the centre of the circle and $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ and $\overline{GH}$ are the chords of the circle.

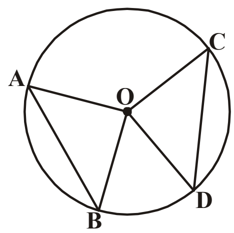
What did you observe from the figure?

We can observe from the figure that GH > EF > CD > AB.

Now what do you say about the angles subtended by these chords at the centre?

After observing the angles, you will find that the angles subtended by the chords at the centre of the circle increases with increase in the length of chords.

So, now imagine what will happen to the angle subtended at the centre of the circle, if we take two equal chords of a circle?



Construct a circle with centre 'O' and draw equal chords AB and CD using the compass and ruler.

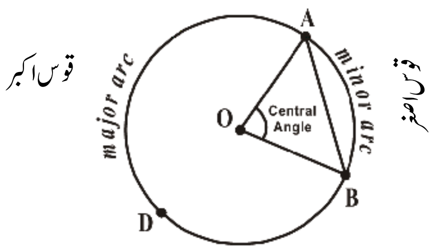
Join the centre 'O' with A, B and with C and D. Now measure the angles $\angle AOB$ and $\angle COD$. Are they equal to each other?

Draw two or more equal chords of a circle and measure the angles subtended by them at the centre.

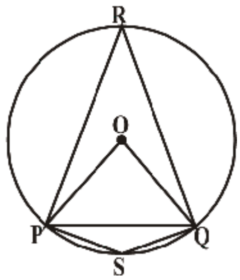
You will find that the angles subtended by them at the centre are equal.

Let us try to prove this fact.

12.2 دائرہ کے کسی نقطہ پر وتر سے بننے والا زاویہ



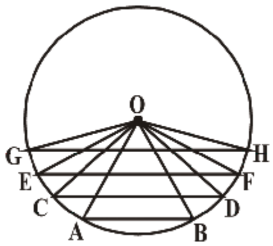
فرض کیجئے کہ ایک دائرے پر A اور B دو نقاط ہیں اس دائرہ کا مرکز O ہے۔ AO اور BO کو ملایئے $\overline{BO}$, $\overline{AO}$ یعنی $\angle AOB$، دائرہ کے مرکز O پر بننے والے زاویہ کو مرکز O وتر پر $\overline{AB}$ کا زاویہ کہتے ہیں۔



شکل میں $\angle POQ$، $\angle PSQ$ اور $\angle PRQ$ کو آپ کونسے زاویئے کہیں گے؟

(i) مرکز O پر PQ سے بننے والا زاویہ $\angle POQ$ ہوگا۔

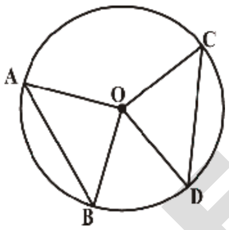
(ii) زاویئے $\angle PSQ$ اور $\angle PRQ$ وتر PQ کے ذریعے نقطہ S اور نقطہ R پر قوس اصغر اور قوس اکبر میں بنائے گئے زاویئے ہیں۔



دی ہوئی شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے جبکہ AB، CD، EF، اور GH دائرے کے وتر ہیں اس شکل سے ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ

GH>EF>CD>AB

ان وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویوں سے متعلق آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟



ان زاویوں کا مطالعہ کرنے سے آپ کو پتہ چلے گا کہ وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویئے وتروں کی لمبائی بڑھنے سے بڑھیں گے۔

لہٰذا اب تصور کیجئے کہ دائرہ پر دو مساوی وتر لینے کی صورت میں مرکز پر بننے والا زاویہ کس طرح تبدیل ہوں گے؟ O کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچیے پرکار اور پٹری کی مدد سے AB اور CD دو مساوی وتر بنایئے۔ مرکز O کو A, B اور C, D سے ملایئے۔ اب زاویوں $\angle AOB$ اور $\angle COD$ کو محسوب کیجئے کیا وہ مساوی ہیں؟

کسی دائرے پر دو یا زائد وتر لیجئے اور مرکز پر ان وتروں سے بننے والے زاویئے محسوب کیجئے۔

آپ مشاہدہ کریں گے کہ ان وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویئے مساوی ہوں گے۔

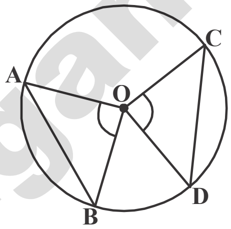
آیئے ہم اسے ثابت کریں گے۔

Theorem-12.1 : Equal chords of a circle subtend equal angles at the centre.

Given : Let 'O' be the centre of the circle. $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ are two equal chords and $\angle AOB$ and $\angle COD$ are the angles subtended by the chords at the centre.

R.T.P. : $\angle AOB \cong \angle COD$

Construction : Join the centre to the end points of each chord and you get two triangles ΔAOB and ΔCOD.



Proof: In triangles AOB and COD

$AB = CD$ (given)

$OA = OC$ (radii of same circle)

$OB = OD$ (radii of same circle)

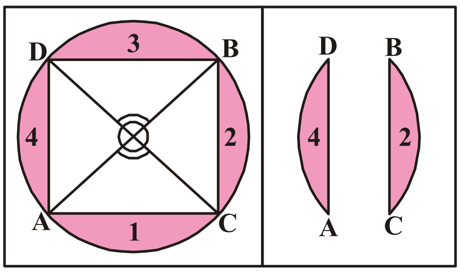
Therefore $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD$ (SSS rule)

Thus $\angle AOB \cong \angle COD$ (corresponding parts of congruent triangles)

In the above theorem, if in a circle, two chords subtend equal angles at the centre, what can you say about the chords? Let us investigate this by the following activity.

Activity

Take a circular paper. Fold it along any diameter such that the two edges coincide with each other. Now open it and again fold it into half along another diameter. On opening, we find two diameters meet at the centre 'O'. There forms two pairs of vertically opposite angles which are equal. Name the end points of the diameter as A, B, C and D.



Draw the chords $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ and $\overline{AD}$.

Now take cut-out of the four segments namely 1, 2, 3 and 4.

If you place these segments pair wise one above the other the edges of the pairs (1,3) and (2,4) coincide with each other.

Is $\overline{AD} = \overline{BC}$ and $\overline{AC} = \overline{BD}$?

Though you have seen it in this particular case, try it out for other equal angles too. The chords will all turn out to be equal. We will prove it as a theorem.

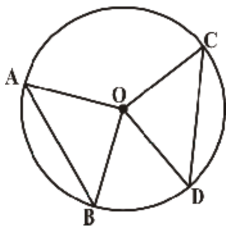
مسئلہ 12.1: دائرہ کے مساوی وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں

مفروض : O دائرہ کا مرکز $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو مساوی وتر ہیں جبکہ $\angle AOB$ اور $\angle COD$ ان وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے ہیں۔

مطلوب $\angle AOB \cong \angle COD$

عمل: مرکز کو ہر ایک وتر کے سروں سے ملانے پر ΔAOB اور ΔCOD کے دو مثلثات حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: مثلثات AOB اور COD پر غور کرنے سے



AB = CD (دیا گیا ہے)

OA = OC (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

OB = OD (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ لہٰذا (ضلع ضلع ضلع خصوصیت)

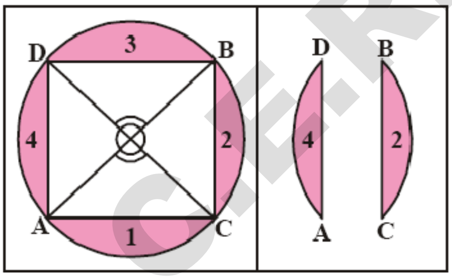
$\angle AOB \cong \angle COD$ (مماثل مثلثات کے متعلقہ حصے)

اس مسئلہ کے تحت ایک دائرہ میں دو وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں بتایئے کہ وتروں کے بارے میں آپ کیا مشاہدہ کریں گے؟

آیئے اس بات کو عملی کام کے ذریعہ جانچنے کی کوشش کریں۔

مشغلہ

ایک دائروی کاغذ لیجئے اسے کسی قطر کے ساتھ اس طرح تہہ کیجئے کہ اس کے کنارے ایک دوسرے سے منطبق ہوں۔ اب اسے کھول کر کسی اور قطر کے ساتھ موڑ دیجئے دوبارہ کھول دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں مرکز O پر قطع کرتے ہیں مرکز پر زاویوں کے دو مخالف جوڑ بنتے ہیں جو مساوی ہیں اب قطر کے سروں کو A، B، C اور D مان لیجئے۔



وتر $\overline{AC}$، $\overline{BC}$، $\overline{BD}$ اور $\overline{AD}$ کھینچئے۔ اب دائروں کے چاروں حصوں یعنی 1، 2، 3، اور 4 کو کاٹ کر علیحدہ کرلیجئے۔

اگر آپ دائرے کے ان ٹکڑوں کی جوڑیوں کو ایک دوسرے پر رکھیں گے تو آپ کو پتہ چلے گا کہ جوڑ (1,3) اور جوڑ (2,4) ایک دوسرے سے منطبق ہوتے ہیں۔

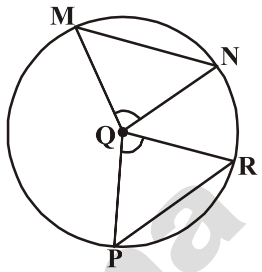
کیا $\overline{AD} = \overline{BC}$ اور $\overline{AC} = \overline{BD}$ ہیں؟

اگر چہ آپ نے اس خصوصی صورت کا مطالعہ کیا ہے تاہم دیگر مساوی زاویوں کے لئے ایسا ہی تجربہ کریں۔

حسب ذیل مسئلہ کی بنا پر سب وتر مساوی ہوں گے۔

Can you state converse of the above theorem (12.1)?

Theorem-12.2 : If the angle subtended by the chords of a circle at the centre are equal, then the chords are equal.



This is the converse of the theorem 12.1.

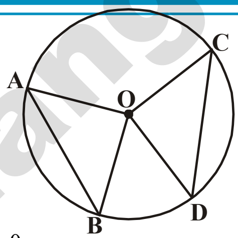
Note that in adjacent figure $\angle PQR = \angle MQN$, then

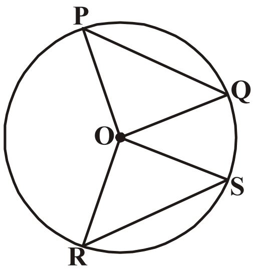
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (Why?)

Is $PR = MN$? (Verify)

Exercise - 12.2

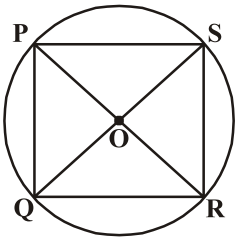
1. In the figure, if $AB = CD$ and $\angle AOB = 90^0$ find $\angle COD$





2. In the figure, $PQ = RS$ and $\angle ORS = 48^0$.

   Find $\angle OPQ$ and $\angle ROS$.

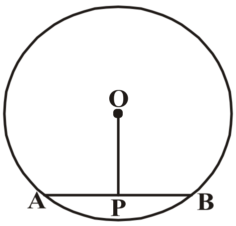


3. In the figure PR and QS are two diameters. Is $PQ = RS$?

12.3 Perpendicular from the Centre to a Chord

Activity

- Construct a circle with centre O. Draw a chord $\overline{AB}$ and a perpendicular to the chord $\overline{AB}$ from the centre 'O'.
- Let the point of intersection of the perpendicular on $\overline{AB}$ be P.
- After measuring PA and PB, we will find $PA = PB$.



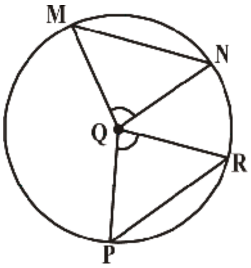
Theorem-12.3 : The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord.

Write a proof by yourself by joining O to A and B and prove that $\Delta OPA \cong \Delta OPB$.

What is the converse of the theorem 12.3?

"If a line drawn from the centre of a circle bisects the chord then the line is perpendicular to that chord"

کیا آپ اس مسئلہ (12.1) کا برعکس مسئلہ بتلا سکتے ہیں۔



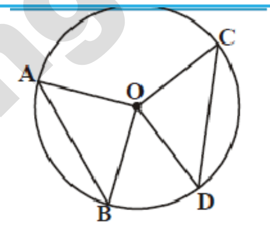
مسئلہ 12.2 اگر کسی دائرے میں مرکز پر وتروں سے بننے والے زاویئے مساوی ہوں تو یہ وتر مساوی ہوں گے۔ یہ مسئلہ گزشتہ مسئلہ کا برعکس مسئلہ کہلاتا ہے۔ 12.1

نوٹ کیجئے کہ دیئے ہوئے مسئلہ میں $\angle MQN = \angle PQR$ تب

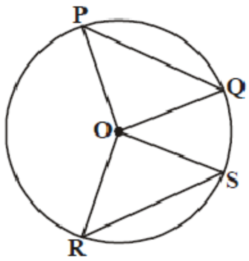
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (کیوں)

کیا $PR = MN$؟ (تصدیق کیجئے)

مشق 12.2

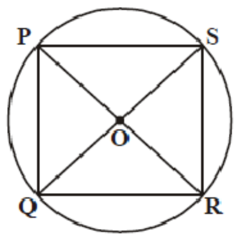


.1 دی ہوئی شکل میں اگر $AB=CD$ اور $\angle AOB=90^0$ تب $\angle COD$ معلوم کیجئے۔



.2 دی ہوئی شکل میں $PQ=RS$ اور $\angle ORS=48^0$

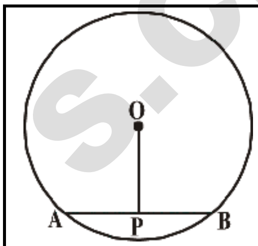
تب $\angle OPQ$ اور $\angle ROS$ معلوم کیجئے۔



.3 شکل میں PR اور QS قطر ہیں کیا $PQ = RS$؟

12.3 مرکز سے وتر پر عمود گرانا

مشغلہ



☆ O کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچئے۔ ایک وتر $\overline{AB}$ کھینچئے اور مرکزہ O سے $\overline{AB}$ پر عمود گرائیے۔

☆ فرض کیجئے کہ $\overline{AB}$ پر عمود کا نقطہ تقاطع P ہے

☆ PA اور PB کو محسوب کیجئے ہم دیکھیں گے کہ $PA=PB$

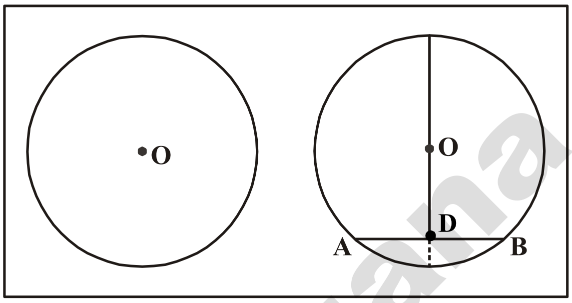
مسئلہ 12.3: کسی دائرہ میں مرکز سے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔

O سے A اور B کو ملاتے ہوئے ثابت کیجئے کہ $\Delta OPA \cong \Delta OPB$ آپ از خود ثبوت دے سکتے ہیں اس مسئلہ کا برعکس مسئلہ کیا ہوگا؟

اگر دائرہ کے مرکز سے کھینچا جانے والا خط کسی وتر کی تنصیف کرتا ہو تو یہ خط وتر کے عمود وار ہوگا۔

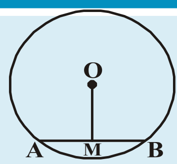
Activity

Take a circular sheet of paper and mark centre as 'O'



Fold it into two unequal parts and open it. Let the crease represent a chord AB, and then make a fold such that 'A' coincides with B. Mark the point of intersection of the two folds as D. Is AD=DB? and $\angle ODA = \angle ODB$? (Measure the angles between the creases). They are right angles. So, we can make a hypothesis "the line drawn through the centre of a circle to bisect a chord is perpendicular to the chord".

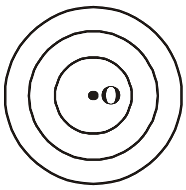
Try This

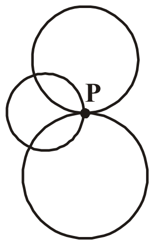


In a circle with centre 'O'. $\overline{AB}$ is a chord and 'M' is its midpoint. Now prove that $\overline{OM}$ is perpendicular to $\overline{AB}$.

(**Hint** : Join $\overline{OA}$ and $\overline{OB}$ consider triangles OAM and OBM)

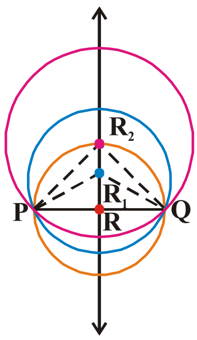
12.3.1 The three points that describe a circle





Let 'O' be a point on a plane. How many circles we can draw with centre 'O'? As many circles as we wish. We have already learnt that these circles are called concentric circles. If 'P' is a point other than the centre of the circle, then also we can draw many circles through P.

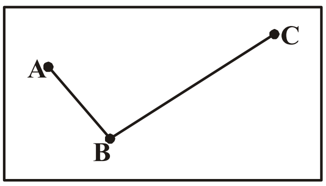
Suppose that there are two distinct points P and Q



How many circles can be drawn passing through given two points? We see that we can draw many circles passing through P and Q.

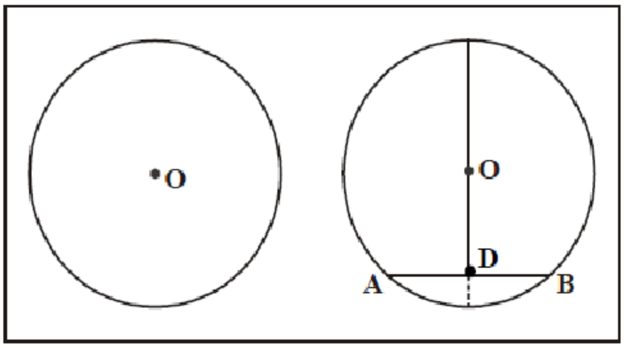
Let us join P and Q, draw the perpendicular bisector to $\overline{PQ}$. Take any three points R, R_1 and R_2 on the perpendicular bisector and draw circles with centre R, R_1, R_2 and radii RP, R_1P and R_2P respectively. Does these circles also passes through Q (Why?)

As every point on the perpendicular bisector of a line segment is equidistant from end points of the line segment. Centre of a circle lies on the perpendicular of any chord.



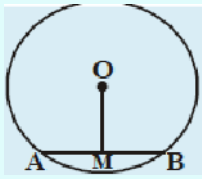
If three non-collinear points are given, then how many circles can be drawn through them? Let us examine it. Take any three non-collinear points A, B, C and join A, B and B, C.

مشغلہ



1. ایک دائروی کاغذ لیجئے O کو اس کا مرکز فرض کیجئے
اسے دو غیر مساوی حصوں میں موڑ کر کھولئے۔ فرض کیجئے کہ سلوٹ کی لکیر وتر کو ظاہر کرتی ہے اور اس کاغذ کو اس طرح موڑئے کہ A اور B منطبق ہوجائیں۔ دونوں سلوٹوں کے نقطہ تقاطع کو D متصور کیجئے کیا AD=DB، ∠ODB=?، ∠ODA=?، دونوں سلوٹوں کے درمیان کا زاویہ محسوب کیجئے۔ یہ زاویہ قائمہ ہوں گے۔لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ کسی دائرے کے مرکز سے کسی وتر کی تنصیف کرنے والا خطی خط اس وتر کا عمود ہوگا۔

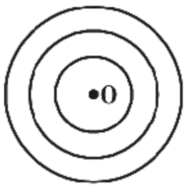
کوشش کیجئے

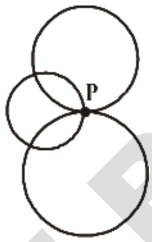


کسی دائرہ میں جس کا مرکز O ہے $\overline{AB}$ ایک وتر ہے نقطہ M نقطہ وسطی ہے ثابت کیجئے کہ $\overline{OM}$ عمود وار ہے AB کا۔

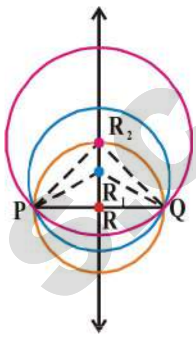
(اشارہ OA اور OB کو ملاو اور مثلثات OAM اور OBM پر غور کرو؟

12.3.1 تین نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ



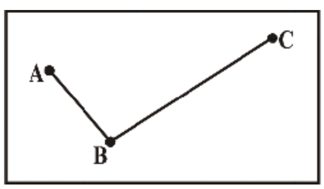


فرض کیجئے کہ O کسی مستوی پر ایک نقطہ ہے بتائیے کہ اس نقطہ 'O' کو مرکز مان کر کتنے دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؟ آپ جتنے چاہیں دائرے اتار سکتے ہیں۔ ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ ان دائروں کو ہم مرکز دائرے کہا جاتا ہے۔ اگر P ایک ایسا نقطہ ہے جو مرکز نہیں ہے تو اس نقطہ P سے بھی کئی دائرے کھینچے جاسکتے ہیں۔

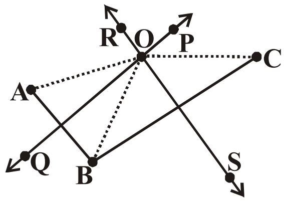


فرض کیجئے کہ دو نقاط P اور Q مختلف مقامات پر واقع ہیں۔
بتائیے کہ دو نقاط سے کتنے دائرے کھینچے جاسکیں گے؟ ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط P اور Q سے کئی دائرے کھینچے جاسکتے ہیں۔

P اور Q کو ملائیے اور PQ پر عمودی ناصف کھینچے کوئی تین نقاط R، R_1، اور R_2 اس عمودی ناصف پر لیجئے ان تین نقاط کو مرکز مان کر بالترتیب RP، R_1P اور R_2P نصف قطر کے دائرے کھینچئے۔ بتائیے کہ کیا یہ دائرے نقطہ Q سے گذریں گے (کیوں؟) ایک خطی قطعہ کے عمودی ناصف پر موجود ہر نقطہ اس کے اختتامی نقطہ سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے، ایک دائیرے کا مرکز کسی بھی وتر کے عمود اور خط پر موجود ہوتا ہے۔



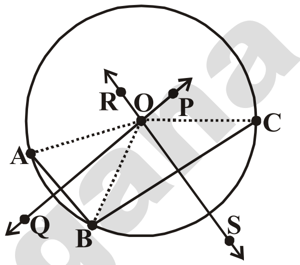
کوئی تین نقاط سے جو ہم خط نہ ہوں کتنے دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؟ آیئے جانچ کریں۔
کوئی تین غیر ہم خط نقاط A, B, C لیجئے۔ A,B اور B,C کو ملائیے۔



Draw $\overleftrightarrow{PQ}$ and $\overleftrightarrow{RS}$ the perpendicular bisectors to $\overline{AB}$ and $\overline{BC}$. respectively. Both of them intersect at a point 'O'(since two lines cannot have more than one point in common)

Now O lies on the perpendicular bisector of $\overline{AB}$, so OA = OB. .....(i)

(As every point on $\overleftrightarrow{PQ}$ is at equidistant from A and B)



Also, 'O' lies on the perpendicular bisectors of $\overline{BC}$

Therefore OB = OC ..... (ii)

From equation (i) and (ii)

We can say that OA = OB = OC (transitive law)

Therefore, 'O' is the only point which is equidistant from the points A, B and C so if we draw a circle with centre O and radius OA, it will also pass through B and C i.e. we have only one circle that passes through A, B and C.

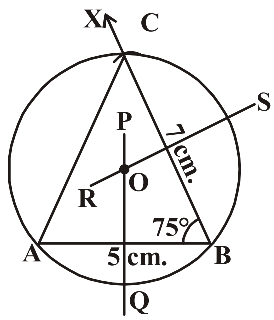
The hypothesis based on above observation is "there is one and only one circle that passes through three non-collinear points"

Note **:** If we join AC, the triangle ABC is formed. All its vertices lie on the circle. This circle is called circum circle of the triangle, the centre of the circle 'O' is circumcentre and the radius OA or OB or OC i.e. is circumradius. Generally circumradius is denoted by 'R'.

Try This

If three points are collinear, how many circles can be drawn through these points? Now, try to draw a circle passing through these three points.

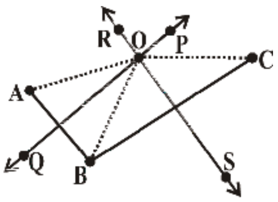
Example-1. Construct a circumcircle of the triangle ABC where AB = 5cm; $\angle$B = 75° and BC = 7cm



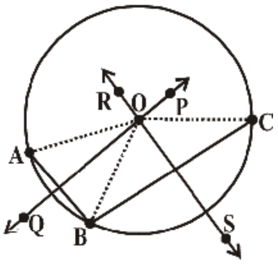
Solution : Draw a line segment AB= 5 cm. Draw $\overrightarrow{BX}$ at B such that $\angle$B = 75°. Draw an arc of radius 7cm with centre B to cut $\overrightarrow{BX}$ at C. Join CA to form ΔABC. Draw perpendicular bisectors $\overleftrightarrow{PQ}$ and $\overleftrightarrow{RS}$ to $\overline{AB}$ and $\overline{BC}$ respectively. $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ intersect at 'O'. Keeping 'O' as a centre, draw a circle with OA as radius. The circle also passes through B and C and this is the required circumcircle.

12.3.2 Chords and their distance from the centre of the circle

A circle can have infinite chords. Suppose we make many chords of equal length in a circle, then what would be the distance of these chords of equal length from the centre? Let us examine it through this activity.



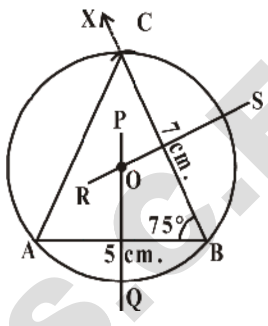
$\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے عمودی ناصف بالترتیب $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ کھینچیے یہ دونوں نقاط O پر قطع کریں گے۔
(چونکہ دو خطوط کا نقطہ تقاطع ایک سے زیادہ نہیں ہوسکتا)
اب O، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔ لہٰذا (i)......OA = OB
$\overleftrightarrow{PQ}$ پر ہر نقطہ A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہوگا اس کے علاوہ نقطہ O, BC کا بھی عمودی ناصف ہوگا۔



(ii) ....OB=OC
مساوات (i) اور (ii) سے
ہم کہہ سکتے ہیں کہ OA = OB = OC (متبادلت کا قانون)
لہٰذا O ہی وہ واحد نقطہ ہے جو کہ نقاط A، B اور C سے مساوی فاصلہ پر ہوگا۔ یعنی اگر O مرکز، OA نصف قطر ہو تو یہ B اور C سے گزرے گا، نتیجہ یہ ہے کہ نقاط A، B اور C سے گزرنے والا صرف ایک ہی نقطہ ہوگا۔
مذکورہ مشغلہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ تین غیر ہم خط نقاط سے صرف ایک ہی دائرہ کھینچا جاسکتا ہے۔
نوٹ: AC کو ملانے پر ΔABC بنتا ہے اس کے تینوں راس دائرہ پر ہوں گے اس دائرے کو مثلث کا محیطی دائرہ کہتے ہیں۔ دائرہ کا مرکز محیطی مرکز اور نصف قطر OA یا OB یا OC محیطی نصف مرکز کہلائیں گے۔

کوشش کیجیے

اگر تین نقاط ہم خط ہوں تو بتایئے کہ ان نقاط سے کتنے دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؟ آپ ان تین نقاط سے گزرنے والا ایک دائرہ بنانے کی کوشش کیجئے۔



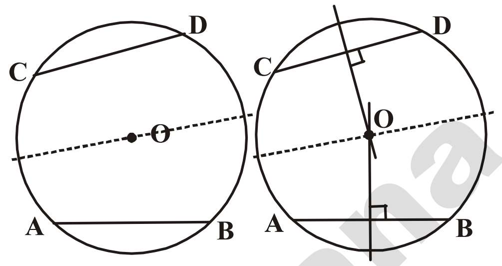
مثال 1: ΔABC کا محیطی دائرہ بنایئے جہاں AB = 5 سمر $\angle B = 75^0$ اور BC = 7 سمر
حل:
ایک خطی خط AB = 5 سمر کھینچئے B پر BX اس طرح کھینچئے کہ $\angle B = 75^0$ ہو۔ B کو مرکز مان کر نصف قطر 7 سمر کا ایک قوس کھینچئے تا کہ $\overrightarrow{BX}$ کو C پر قطع کرے۔ CA کو ملایئے آپ کو ΔABC حاصل ہوگا $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ پر بالترتیب $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ نقطہ O پر قطع کریں گے۔ نقطہ O کو مرکز مان کر OA نصف قطر لیتے ہوئے ایک دائرہ بنایئے۔ یہ دائرہ بھی B اور C سے گزرے گا اور یہی مطلوبہ محیطی دائرہ ہوگا۔

12.3.2 دائرہ کے وتر اور مرکز سے ان وتروں کا فاصلہ

کسی دائرے میں لامتناہی وتر ہوتے ہیں۔ ہم ایک دائرے میں مساوی لمبائی کے بے شمار وتر بنا سکتے ہیں۔ مساوی لمبائی کے ان وتروں سے مرکز کا فاصلہ کیا ہوگا؟ آیئے اس بات کو ہم مشغلہ کے ذریعہ جانچنے کی کوشش کریں گے۔

Activity

Draw a big circle on a paper and take a cut-out of it. Mark its centre as 'O'. Fold it in half. Now make another fold near semi-circular edge. Now unfold it. You will get two conguent folds of chords. Name them as AB and CD. Now make perpendicular folds passing through centre 'O' for them. Using divider compare the perpendicular distances of these chords from the centre.



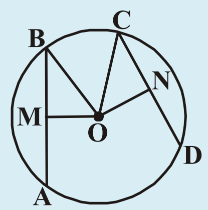
Repeat the above activity by folding congruent chords. State your observations as a hypothesis.

"The congruent chords in a circle are at equal distance from the centre of the circle"

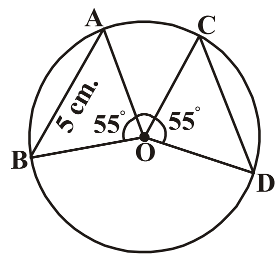
Try This

In the figure, 'O' is the centre of the circle and AB = CD. OM is perpendicular on $\overline{AB}$ and $\overline{ON}$ is perpendicular on $\overline{CD}$. Then prove that OM = ON.

As the above hypothesis has been proved logically, it becomes the theorem 'chords of equal length are at equal distance from the centre of the circle.'



Example-2. In the figure, O is the centre of the circle. Find the length of CD, if AB = 5 cm.



Solution : In Δ AOB and Δ COD,

OA = OC (why?)

OB = OD (why?)

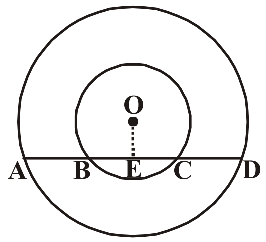
$\angle AOB = \angle COD$

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (Criterian of congruent by SAS)

$\because$ AB = CD (Congruent parts of congruent triangles)

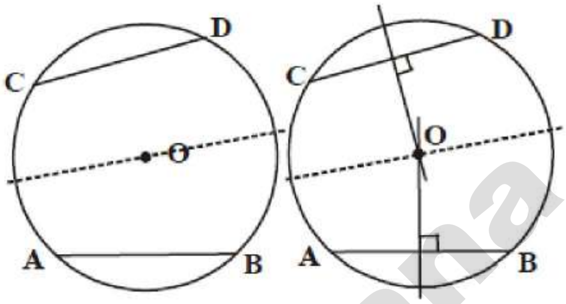
$\therefore$ AB = 5 cm. then CD = 5 cm.

Example-3. In the adjacent figure, there are two concentric circles with centre 'O'. Chord AD of the bigger circle intersects the smaller circle at B and C. Show that AB = CD.



Given : In two concentric circles with centre 'O'. $\overline{AD}$ is the chord of the

مشغلہ

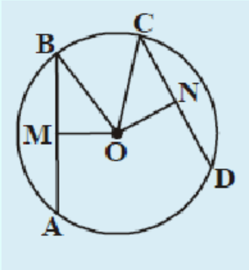


ایک کاغذ پر ایک بڑا دائرہ بنا کر اسے الگ کر لیجئے اس کے مرکز پر O کا نشان لگایئے اسے برابر آدھے پر موڑیئے اسے کھول کر اوپری کنارے سے موڑیئے پھر کھول دیجئے آپ کو وتروں کے دو مماثل سلوٹیں ملیں گی ان وتروں کو AB اور CD کا نام دیجئے۔ اب O سے گزرتے ہوئے ان کے عمود کی سلوٹیں بنایئے قاسم استعمال کرتے ہوئے مرکز سے ان وتروں کے فاصلہ (عمودی) کا تقابل کیجئے۔

ایک جیسے وتر لیتے ہوئے اس عمل کو دہرایئے اپنے مشاہدات کا نتیجہ نوٹ کیجئے۔

ایک دائرہ میں مماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

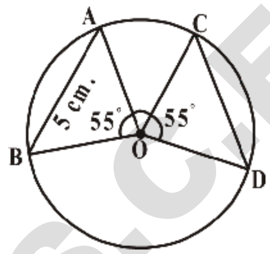
کوشش کیجئے



دی ہوئی شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے اور AB=CD، $\overline{OM}$، $\overline{AB}$ کا اور $\overline{ON}$، $\overline{CD}$ کا عمود ہے۔ ثابت کیجئے کہ OM = ON

مذکورہ نتیجہ منطقی طور پر چونکہ ثابت کردیا گیا ہے اس لئے اسے مسئلہ کہتے ہیں یعنی مساوی وتر مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

مثال 2: شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے اگر AB=5 سمر ہو تو CD کی لمبائی معلوم کرو۔



حل: ΔAOB اور ΔCOD میں

OA = OC (کیوں؟)

OB = OD (کیوں؟)

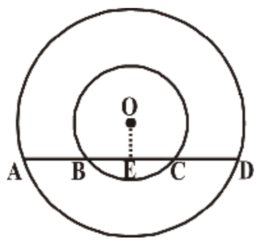
$\angle AOB = \angle COD$

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

AB = CD (مماثل مثلثات کے مماثل حصے)

AB = 5 cm. CD = 5 cm.

مثال 3: دی ہوئی شکل میں دو ہم مرکز دائرے ہیں جن کا مرکز O ہے بڑے دائرے کا وتر AD نقطہ B اور C پر چھوٹے دائرے کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجئے کہ AB = CD



دیا گیا ہے کہ: دو ہم مرکز دائروں کا مرکز نقطہ O ہے، $\overline{AD}$ بڑے دائرے کا وتر ہے $\overline{AD}$، B اور C پر چھوٹے دائرے کو قطع کرتا ہے۔

R.T.P. : AB = CD

Construction : Draw $\overline{OE}$ perpendicular to $\overline{AD}$

Proof : AD is the chord of the bigger circle with centre 'O' and $\overline{OE}$ is perpendicular to $\overline{AD}$.

$\because$ $\overline{OE}$ bisects $\overline{AD}$ (The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisect it)

$\therefore$ AE = ED ..... (i)

$\overline{BC}$ is the chord of the smaller circle with centre 'O' and $\overline{OE}$ is perpendicular to AD.

$\because$ $\overline{OE}$ bisects $\overline{BC}$ (from the same theorem)

$\therefore$ BE = CE ..... (ii)

Subtracting the equation (ii) from (i), we get

AE - BE = ED - EC

AB = CD

EXERCISE - 12.3

1. Draw the following triangles and construct circumcircles for them.

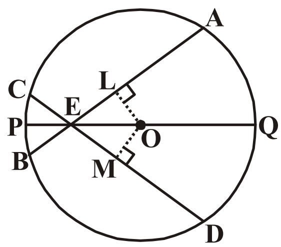
   (i) In Δ ABC, AB = 6cm, BC = 7cm and $\angle A = 60^{\circ}$

   (ii) In Δ PQR, PQ = 5cm, QR = 6cm and RP = 8.2cm

   (iii) In Δ XYZ, XY = 4.8cm, $\angle X = 60^{\circ}$ and $\angle Y = 70^{\circ}$

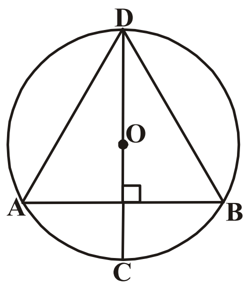
2. Draw two circles passing through A, B where AB = 5.4cm

3. If two circles intersect at two points, then prove that their centres lie on the perpendicular bisector of the common chord.



4. If two intersecting chords of a circle make equal angles with diameter passing through their point of intersection, prove that the chords are equal.

5. In the adjacent figure, $\overline{AB}$ is a chord of circle with centre O. $\overline{CD}$ is the diameter perpendicualr to $\overline{AB}$. Show that AD = BD.



مطلوب: AB = CD

عمل: $\overline{AD},\overline{OE}$ پر عمود کھینچیے

ثبوت: AD بڑے دائرے کا وتر ہے۔ اس دائرے کا مرکز O ہے اور $\overline{OE}$، $\overline{AD}$ کا عمود ہے۔

$\overline{OE}$، $\overline{AD}$ کی تنصیف کرتا ہے۔ (کسی دائرے کے مرکز سے کھینچا جانے والا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے)

لہٰذا (i) .... AE = ED

$\overline{BC}$ چھوٹے دائرے کا وتر ہے جس کا مرکز O ہے جب کہ $\overline{OE}$، $\overline{AD}$ کا عمود ہے۔

چوں کہ $\overline{OE}$، $\overline{BC}$ کی تنصیف کرتا ہے (اسی مسئلے سے ماخوذ)

لہٰذا (ii) .... BE=CE

مساوات (ii) کو مساوات (i) سے تفریق کرنے پر

AE - BE = ED - EC

AB = CD

مشق 12.3

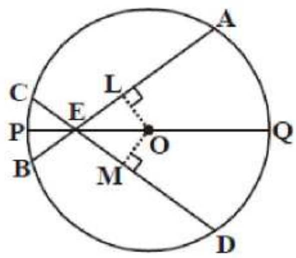
1. حسب ذیل مثلثات بنائیے اور ان کے محیطی دائرے بھی تشکیل دیجیے۔

(i) ΔABC میں AB = 6 سمر BC = 7 سمر اور $\angle A = 60^0$

(ii) ΔPQR میں PQ = 5 سمر QR = 6 سمر اور RP = 8.2 سمر

(iii) ΔXYZ میں XY = 4.8 سمر $\angle X = 60^0$ اور $\angle Y = 70^0$

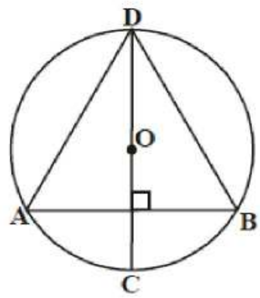
2. ایسے دو دائرے کھینچیے جو نقاط A، B سے گزرتے ہیں جہاں AB = 5.4cm



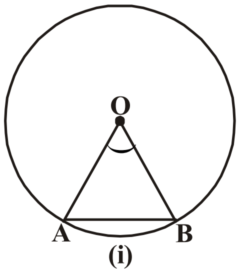
3. اگر کوئی دو دائرے کسی دو نقاط پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ ان کے مراکز ان کے مشترکہ وتر کے عمودی ناصف پر واقع ہوں گے۔

4. اگر دائرے کے دو ایسے وتر جو ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، ان کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے قطر پر مساوی زاویے بناتے ہیں، تو ثابت کیجیے کہ یہ وتر مساوی ہوں گے۔

5. دی ہوئی شکل میں AB دائرہ O کا وتر ہے۔ CD، AB پر عمودی قطر ہے تو ثابت کیجیے کہ
AD = BD



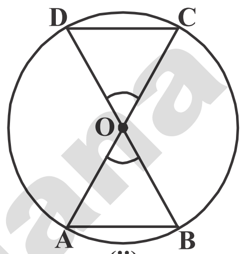
12.4 ANGLE SUBTENDED BY AN ARC OF A CIRCLE



(i)

In the fig.(i), $\overline{AB}$ is a chord and $\overset{\frown}{AB}$ is an arc (minor arc). The end points of the chord and arc are the same i.e. A and B.

Therefore angle subtended by the chord at the centre 'O' is the same as the angle subtended by the arc at the centre 'O'.



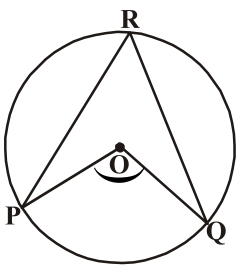
(ii)

In fig.(ii) $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ are two chords of a circle with centre 'O'. If AB = CD, then $\angle AOB = \angle COD$

Therefore we can say that the angle subtended by an arc $\overset{\frown}{AB}$ is equal to the angle subtended by the arc $\overset{\frown}{CD}$ at the centre 'O'. (Prove $\Delta AOB \cong \Delta DOC$)

From the above observations we can conclude that in the same cirlce or congruent circles *"arcs of equal length subtend equal angles at the centre"* [$\therefore$ Angle subtended by an arc at the centre is called a measure of that arc]

12.4.1 Angle subtended by an arc at a point on the remaining part of circle



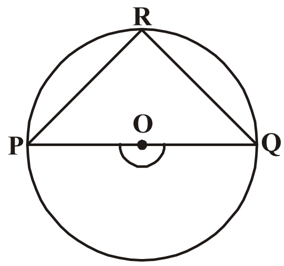
(i)

Consider the circle with centre 'O'.

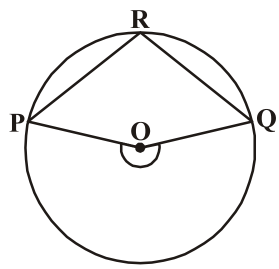
Let $\overset{\frown}{PQ}$ in fig. (i) the minor arc, in fig. (ii) semicircle and in fig. (iii) major arc.

Take any point R on the circle. Join R with P and Q.

$\angle PRQ$ is the angle subtended by the arc PQ at the point R on the circle while $\angle POQ$ is subtended at the centre.



(ii)



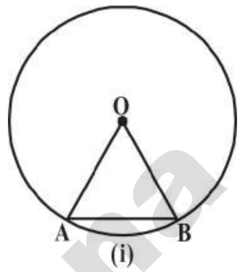
(iii)

Complete the following table for the given figures.

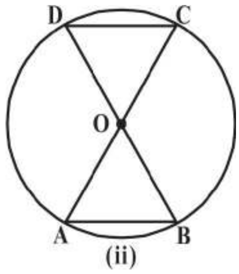
Angle	Fig. (i)	Fig. (ii)	Fig. (iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			

Similarly draw some circles and subtended angles on the circumference and centre of the circle by their arcs. What do you notice? Can you make a conjecture about the angle made by an arc at the centre and a point on the circle? So from the above observations, we can say that *"The angle subtended by an arc at the centre 'O' is twice the angle subtended by it on the remaining arc of the circle"*.

12.4 کسی دائرے کی قوس سے بننے والا زاویہ


(i)

شکل (i) میں $\overline{AB}$ ایک وتر ہے اور $\widehat{AB}$ ایک قوس (قوسِ اصغر) ہے قوس اور وتر کے اختتامی نقاط وہی ہیں یعنی A اور B۔ لہٰذا مرکز O پر اس وتر سے بننے والا زاویہ اور قوس سے بننے والا زاویہ مساوی ہوگا۔


(ii)

شکل (ii) میں $\overline{AB}$ اور، $\widehat{CD}$ دائرہ O کے دو وتر ہیں۔ جن کا مرکز 'O' ہے۔

اگر $AB=CD$ ہو تو $\angle AOB=\angle COD$

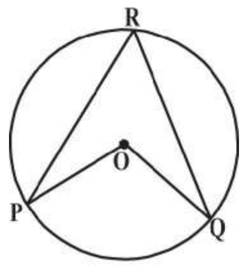
لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ قوس $\widehat{AB}$ سے بننے والا زاویہ قوس $\widehat{CD}$ مرکز پر بننے والے زاویے کے مساوی ہوگا۔

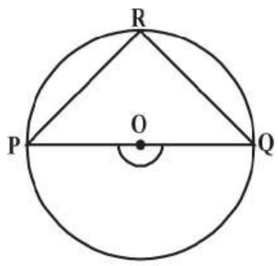
(ثابت کیجیے کہ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$)

مذکورہ مشاہدات سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی دائرے میں یا متماثل دائروں میں مساوی لمبائی رکھنے والی قوسوں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

12.4.1 دائرے کے باقی حصہ کے کسی ایک نقطہ پر قوس سے بننے والا زاویہ

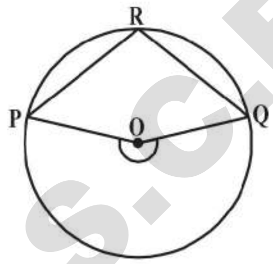
مرکز O والے دائرہ پر غور کیجیے۔


(i)


(ii)

فرض کیجیے کہ شکل (i) میں $\widehat{PQ}$ ایک چھوٹی قوس ہے جب کہ شکل (ii) ایک نیم دائرہ ہے اور شکل (iii) میں قوسِ اکبر ہے۔ دائرے پر کوئی ایک نقطہ R لیجیے۔ R کو P اور Q سے ملائیے۔

دائرے کے نقطہ R پر قوس PQ سے بننے والا زاویہ ∠PRQ ہے جبکہ مرکز پر بننے والا زاویہ ∠POQ ہے۔


(iii)

دی ہوئی اشکال کے لئے ذیل کی جدول کو پُر کیجیے۔

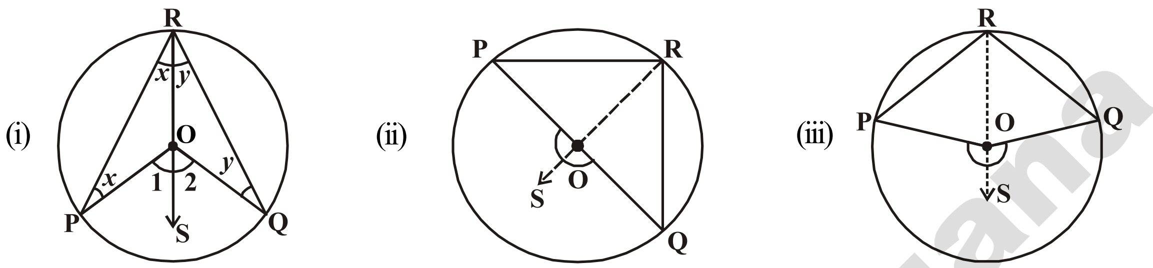
زاویہ	شکل(i)	شکل(ii)	شکل(iii)
∠PRQ			
∠POQ			

اسی طرح اور دائرے بنائیے اور ان دائروں کی قوسوں سے ان کے مرکز پر بننے والے زاویے دکھائیے۔

آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔ کیا آپ کسی دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والے زاویے اور اس دائرے کے کسی نقطے پر بننے والے زاویے سے متعلق نسبت ظاہر کر سکتے ہیں؟ مذکورہ مشاہدات سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ دائرے کے حصہ پر بننے والے زاویے کا دگنا ہوگا۔

Let us prove this hypothesis as a theorem.

Theorem-12.4 : The angle subtended by an arc at the centre of a circle is double the angle subtended by it at any point on the remaining circle.



Given : Let O be the centre of the circle.

$\overset{\frown}{PQ}$ is an arc subtending $\angle POQ$ at the centre.

Let R be a point on the remaining part of the circle (not on $\overset{\frown}{PQ}$)

Proof: Here we have three different cases in which (i) $\overset{\frown}{PQ}$ is minor arc, (ii) $\overset{\frown}{PQ}$ is semicircle and (iii) $\overset{\frown}{PQ}$ is a major arc

Let us begin by joining the point R with the centre 'O' and extend it to a point S (in all cases)

For all the cases in Δ ROP

OP = OR (radii of the same circle)

Therefore $\angle ORP = \angle OPR$ (Angles opposite to equal sides of an isosceles triangle are equal).

For convenience
Let $\angle ORP = \angle OPR = x$
$\angle POS = \angle 1$
$\angle 1 = x + x = 2x$
Let $\angle ORQ = \angle OQR = y$
$\angle SOQ = \angle 2$
$\angle 2 = y + y = 2y$
Now $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$
$= 2(x+y) = 2(\angle PRO + \angle ORQ)$
(i.e.) $\angle POQ = 2\angle PRQ$

$\angle POS$ is an exterior angle of Δ ROP (construction)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR$ or $2\angle ORP$ ..... (1)

($\because$ exterior angle = sum of opp. interior angles)

Similarly for ΔROQ

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ or $2\angle ORQ$ ... (2)

($\because$ exterior angle is equal to sum of the opposite interior angles)

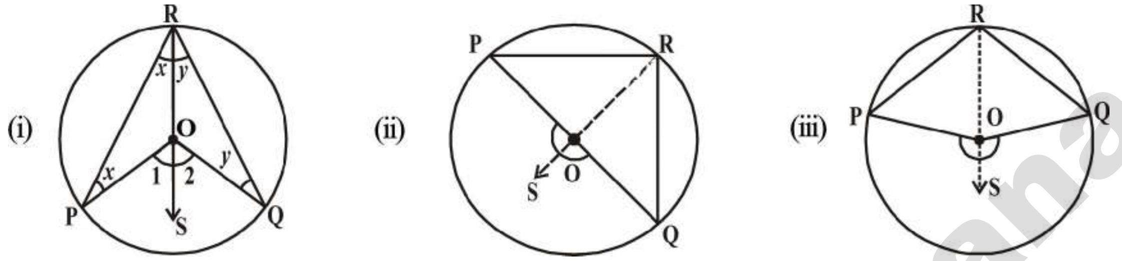
From (1) and (2)

$\angle POS + \angle SOQ = 2(\angle ORP + \angle ORQ)$

This is same as $\angle POQ = 2\angle QRP$ ..... (3)

آیئے اسے منطقی طور پر ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 12.4: دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ دائرہ کی باقی قوس سے مرکز پر بننے والے قوس کے زاویئے کا دگنا ہوتا ہے۔



دیا گیا ہے: فرض کیجیے کہ O دائرے کا مرکز ہے۔

مرکز پر قوس $\overset{\frown}{PQ}$ سے بننے والا زاویہ $\angle POQ$ ہے۔

فرض کیجیے کہ دائرے کی دوسری جانب بقیہ حصے پر ایک نقطہ R لیا گیا۔ (جو $\overset{\frown}{PQ}$ پر واقع نہیں)

ثبوت: یہاں مختلف صورتیں پائی جاتی ہیں۔ (i) $\overset{\frown}{PQ}$ قوسِ اصغر ہے (ii) $\overset{\frown}{PQ}$ ایک نیم دائرہ ہے اور (iii) $\overset{\frown}{PQ}$ قوسِ اکبر ہے۔

دائرے کے مرکز 'O' سے نقطۂ R کو ملایئے اور اسے نقطہ S تک کھینچیے (تمام صورتوں میں)

ΔROP کی تمام صورتوں کے لیے

$RO=OP$ (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

لہٰذا $\angle ORP=\angle OPR$ (مثلث مساوی الساقین میں مساوی ضلعوں کے مخالف کے زاویے مساوی ہوتے ہیں)

ΔROP کا خارجی زاویہ $\angle POS$ ہے

$\angle POS=\angle ORP+\angle OPR$ یا $2\angle ORP$ .... (i)

(خارجی زوایہ = مخالف داخلی زاویوں کے مجموعہ کے)

اسی طرح سے ΔROQ

$\angle SOQ=\angle ORQ+\angle OQR$ یا $2\angle ORQ$ .... (ii)

(خارجی زاویہ مخالف کے داخلی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا)

مساوات (i) اور (ii) سے

$\angle POS+\angle SOQ=2(\angle ORP+\angle ORQ)$

$\angle POQ=2\angle QRP$............ (iii)

سہولت کے لیے

Let $\angle ORP = \angle OPR = x$

$\angle POS = \angle 1$

$\angle 1 = x + x = 2x$

فرض کیجیے $\angle ORQ = \angle OQR = y$

$\angle SOQ = \angle 2$

$\angle 2 = y + y = 2y$

اب $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$

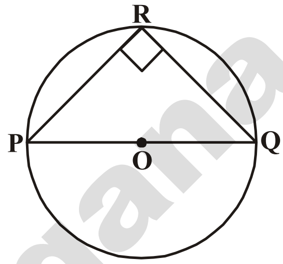
$= 2 (x+y) = 2 (\angle PRO + \angle ORQ)$

لہٰذا $\angle POQ = 2 \angle PRQ$

Hence the theorem is "the angle subtended by an arc at the centre is twice the angle subtended by it at any point on the remaining part of the circle.

Example-4. Let 'O' be the centre of a circle, $\overline{PQ}$ is a diameter, then prove that $\angle PRQ = 90^o$

(OR) Prove that angle in a semi-circle is right angle.



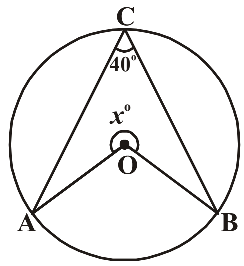
Solution : It is given that $\overline{PQ}$ is a diameter and 'O' is the centre of the circle.

$\therefore$ $\angle POQ = 180^o$ [Angle on a straight line]

and $\angle POQ = 2\ \angle PRQ$ [Angle subtended by an arc at the centre is twice the angle subtended by it at any other point on circle]

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

Example-5. Find the value of x° in the adjacent figure



Solution : Given $\angle ACB = 40^\circ$

By the theorem angle made by the arc AB at the centre

$\angle AOB = 2\ \angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

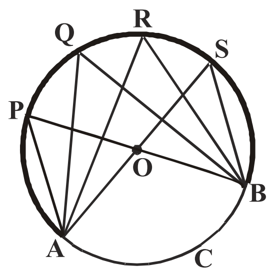
$\because$ $x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

Therefore $x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

12.4.2 Angles in the same segment

Let us now discuss the measures of angles made by an arc in the same segment of a circle.

Consider a circle with centre 'O' and a minor arc AB (See figure). Let P, Q, R and S be points on the major arc AB i.e. on the remaining part of the circle. Now join the end points of the arc AB with points P, Q, R and S to form angles $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ and $\angle ASB$.



$\because$ $\angle AOB = 2\angle APB$ (why?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (why?)

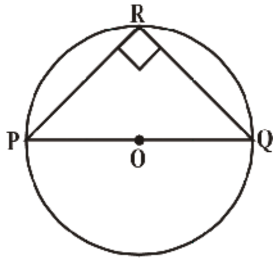
$\angle AOB = 2\angle ARB$ (why?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (why?)

Therefore $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

Observe that "angles subtended by an arc in the same segment are equal".

لہٰذا مسئلہ اس طرح لکھا جائے گا۔ کسی دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ اس دائرے کی دوسری جانب کسی نقطے پر اسی قوس سے بننے والے زاویہ کا دگنا ہوگا۔



(دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ دائرے پر کسی نقطے سے بننے والے زاویے کا دُگنا ہوتا ہے)

مثال 4: فرض کیجیے کہ ایک دائرے کا مرکز O ہے اور PQ قطر ہو تو ثابت کیجیے کہ $\angle PRQ=90^0$

یا

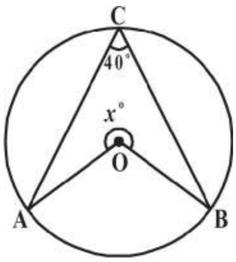
ثابت کیجیے کہ کسی نیم دائرے کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ PQ قطر اور O دائرے کا مرکز ہے۔

$\angle POQ = 180^0$ (مستقیمی زاویہ)

اور $\angle POQ = 2\angle PRQ$

$$\angle PRQ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



مثال 5: دی ہوئی شکل میں x^0 کی قدر دریافت کرو۔

حل: دیا گیا کہ $\angle ACB = 40^0$

مسئلہ کی رو سے قوس AB سے مرکز پر بننے والا زاویہ

$\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 40^0 = 80^0$

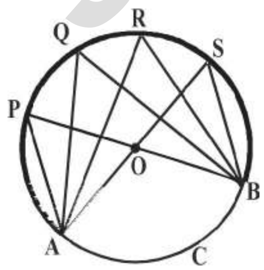
$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

$x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

لہٰذا $x^0=360^0-80^0=280^0$

12.4.2 دائرے کے ایک ہی قطعہ کے زاویے

آئیے ہم ایسے زاویوں پر مباحثہ کریں جو دائرے کے ایک ہی قطعہ میں بنتے ہیں۔ فرض کیجیے کہ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز O ہے جب کہ AB قوسِ اصغر ہے۔ (شکل دیکھیے) فرض کیجیے کہ P ، Q، R اور S قوسِ اکبر AB پر نقاط ہیں یعنی دائرے کی دوسری جانب۔ اب قوس AB کے کناروں کو نقاط P، Q، R اور S سے ملانے پر زاویے $\angle APB$، $\angle AQB$، $\angle ARB$ اور $\angle ASB$ بنتے ہیں۔



$\because \quad \angle AOB = 2\angle APB$ (کیوں؟)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (کیوں؟)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (کیوں؟)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (کیوں؟)

لہٰذا $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

غور کیجیے کہ دائرے کے ایک ہی قطعہ میں قوس سے بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

Note : In the above discussion we have seen that the point P, Q, R, S and A, B lie on the same circle. What do you call them? “Points lying on the same circle are called concyclic”.

The converse of the above theorem can be stated as follows-

Theorem-12.5 : If a line segment joining two points, subtends equal angles at two other points lying on the same side of the line then these, the four points lie on a circle (i.e. they are concyclic)

Given : Two angles $\angle ACB$ and $\angle ADB$ are on the same side of a line segment $\overline{AB}$ joining two points A and B are equal.

R.T.P : A, B, C and D are concyclic (i.e.) they lie on the same circle.

Construction : Draw a circle passing through the three non colinear point A, B and C.

Proof: Suppose the point ‘D’ does not lie on the Circle.

Then there may be other point ‘E’ such that it will intersect AD (or extension of AD)

If points A, B, C and E lie on the circle then

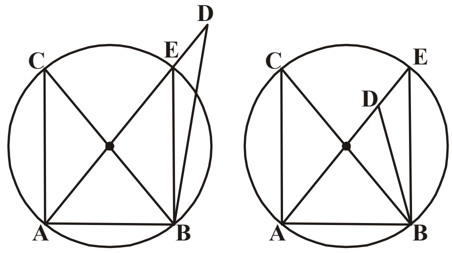
$\angle ACB = \angle AEB$ (Why?)

But it is given that $\angle ACB = \angle ADB$.

Therefore $\angle AEB = \angle ADB$

This is not possible unless E coincides with D (Why?)

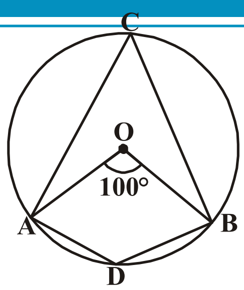
Therefore, E coincides with D.

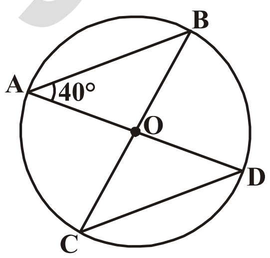


EXERCISE – 12.4

1. In the figure, ‘O’ is the centre of the circle.

   $\angle AOB = 100^\circ$ find $\angle ADB$.





2. In the figure, $\angle BAD = 40^\circ$ then find $\angle BCD$.

نوٹ: مذکورہ مطالعے سے ہم نے مشاہدہ کیا کہ نقاط S،R،Q،P اور B،A دائرے کے ایک ہی خطہ میں واقع ہیں۔ انھیں کیا کہا جائے گا؟ وہ نقاط جو کسی دائرے کے ایک ہی جانب پائے جاتے ہیں محیطی نقاط کہلاتے ہیں۔

مندرجہ بالا مسئلے کے عکس مسئلے کو ذیل کے مطابق لکھا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 12.5: دو نقاط کو ملانے والا ایک خطی قطعہ اس کے ایک ہی جانب واقع دیگر دو نقاط پر مساوی زاویے بناتا ہے تب چاروں نقاط اسی دائرے پر واقع ہوں گے (یعنی محیطی نقاط)

دیا گیا ہے: دو نقاط A اور B کو ملانے والے خطی خطہ $\overline{AB}$ کی ایک ہی جانب کے دو زاویے $\angle ACB$، $\angle ADB$ مساوی ہوتے ہیں۔

مطلوب: D اور C،B،A ہم دائروی ہیں یعنی یہ نقاط اسی دائرے پر واقع ہیں۔

عمل: غیر ہم خط نقاط C اور B،A سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچیے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ ایک چوتھا نقطہ D دائرے پر واقع نہیں ہے۔

تب ایک نقطہ E ایسا ہوسکتا ہے کہ وہ AD کو قطع کرتا ہو (یا AD کو مزید کھینچنے پر حاصل خط)

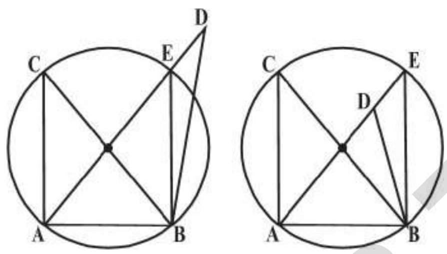
اگر نقاط C،B،A اور E ایک ہی دائرے پر پائے جاتے ہوں تو

$\angle ACB = \angle AEB$ (کیوں؟)

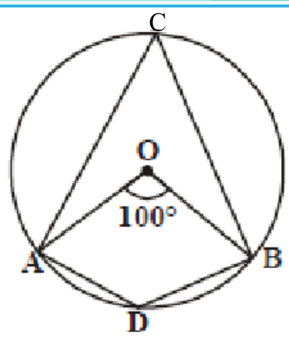
لیکن دیا گیا ہے کہ $\angle ACB = \angle ADB$

لہٰذا $\angle AEB = \angle ADB$

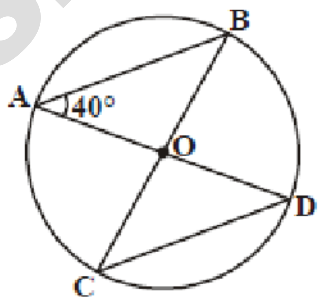
یہ اس وقت تک ممکن نہیں ہے جب تک کہ E، D سے منطبق نہ ہوتا ہو۔ (کیوں)



مشق 12.4

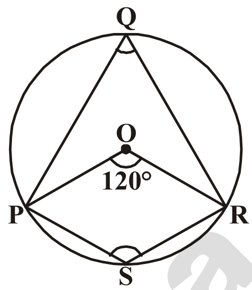


1. دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔
$\angle AOB = 100^0$ تب $\angle ADB$ معلوم کیجیے

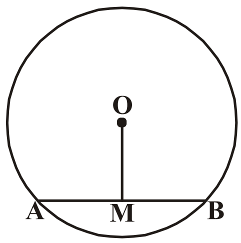


2. شکل کے مطابق $\angle BAD = 40^0$ تب $\angle BCD$ معلوم کیجیے۔

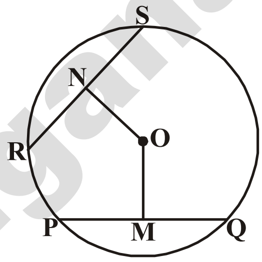
3. In the figure, O is the centre of the circle and $\angle POR = 120^\circ$. Find $\angle PQR$ and $\angle PSR$



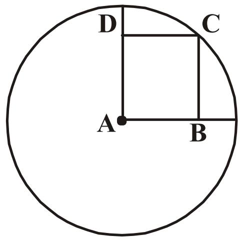
4. In the figure, 'O' is the centre of the circle. OM = 3cm and AB = 8cm. Find the radius of the circle



5. In the figure, 'O' is the centre of the circle and $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ are the perpendiculars from the centre to the chords $\overline{PQ}$ and $\overline{RS}$. If OM = ON and PQ = 6cm. Find RS.

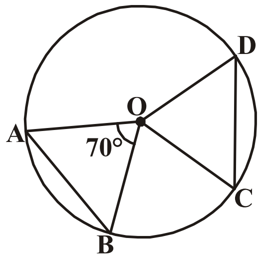


6. A is the centre of the circle and ABCD is a square. If BD = 4cm then find the radius of the circle.

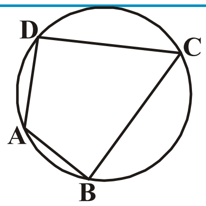


7. Draw a circle with any radius and then draw two chords equidistant from the centre.

8. In the given figure 'O' is the centre of the circle and $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ are equal chords. If $\angle AOB = 70^\circ$. Find the angles of the ΔOCD.



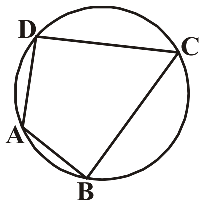
12.5 Cyclic Quadrilateral



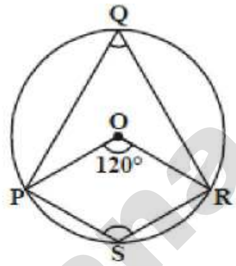
In the figure, the vertices of the quadrilateral A, B, C and D lie on the same circle, this type of quadrilateral ABCD is called cyclic quadrilateral.

Activity

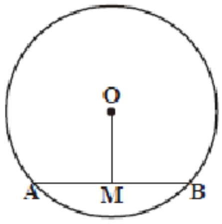
Draw a circle. Mark four points A, B, C and D on it. Draw quadrilateral ABCD. Measure its angles. Record them in the table. Repeat this activity for three more times.



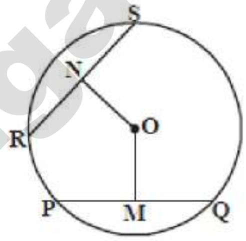
3۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے اور $\angle POR = 120^0$ ہو تو $\angle PQR$ اور $\angle PSR$ معلوم کیجئے۔



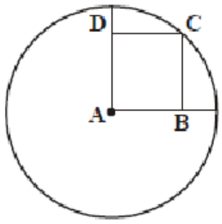
4۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ OM=3cm اور AB=8cm تب دائرے کا نصف قطر دریافت کیجیے۔



5۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے اور OM اور ON مرکز سے وتر PQ اور RS پر عمود گرائے گئے ہیں۔ اگر OM=ON اور PQ=6cm ہو تو RS معلوم کیجیے۔

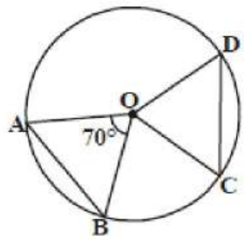


6۔ A دائرے کا مرکز ہے جب کہ ABCD ایک مربع ہے۔ اگر BD=4cm ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

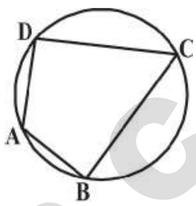


7۔ کسی بھی نصف قطر کا دائرہ کھینچئے اور دو ایسے وتر کھینچئے جو مرکز سے مساوی فاصلہ رکھتے ہیں۔

8۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے جب کہ AB، CD دو مساوی وتر ہیں۔ اگر $\angle AOB = 70^0$ ہو تو ΔOCD کے زاویے معلوم کیجیے۔



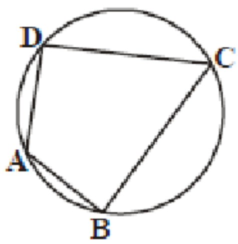
12.5 دائرَوی چار ضلعی



دی ہوئی شکل میں چار ضلعی کے راس A، B، C اور D دائرے پر واقع ہیں۔ ایسے کسی چار ضلعی کو دائروی چار ضلعی کہا جاتا ہے۔

مشغلہ

ایک دائرہ اتاریئے اور اس پر A، B، C اور D نقاط لگائیے۔ محیطی چار ضلعی ABCD کھینچ کر اس کے زاویوں کی پیمائش کیجیے اور دیئے ہوئے جدول میں درج کیجیے۔ اس عملی کام کو مزید تین مرتبہ دوہرائیے۔

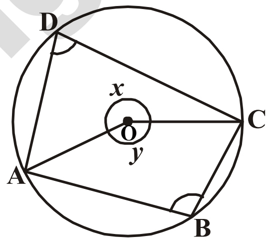


S.No	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1						
2						
3						
4						

What do you infer from the table?

Theorem-12.6 : The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.

Given : ABCD is a cyclic quadrilateral .



To Prove : $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

Construction : Join OA, OC

Proof: $\angle D = \frac{1}{2} \angle y$ (Why?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2} \angle x$ (Why?) ..... (ii)

By adding of (i) and (ii)

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle x$$

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}(\angle y + \angle x)$$

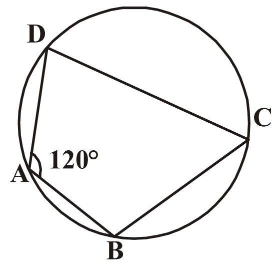
$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

Similarly $\angle A + \angle C = 180°$

Example-6. In the figure, $\angle A = 120^{\circ}$ then find $\angle C$

Solution: ABCD is a cyclic quadrilateral



Therefore $\angle A + \angle C = 180^{\circ}$

$120^{0} + \angle C = 180^{\circ}$

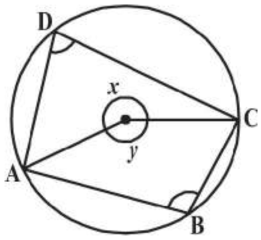
Therefore $\angle C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$

سلسلہ نشان	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						

جدول سے آپ نے کیا نتیجہ اخذ کیا؟

مسئلہ 12.6: ایک محیطی چار ضلعی میں مخالف کے زاویے تکمیلی ہوتے ہیں۔

دیا گیا ہے کہ: ABCD ایک دائروی چار ضلعی ہے۔



مطلوب:

$\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

بناوٹ: OA، OC کو ملائیے۔

ثبوت: $\angle D = \frac{1}{2} \angle y$ ......(i) (کیوں)

$\angle B = \frac{1}{2} \angle x$ .....(ii) (کیوں)

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے پر

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2} \angle y + \frac{1}{2} \angle x$$

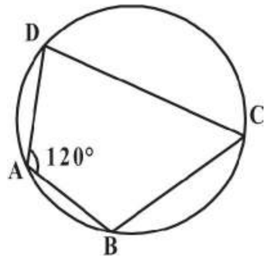
$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2} (\angle y + \angle x)$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

اسی طرح $\angle A + \angle C = 180°$

مثال۔6: دی ہوئی شکل میں $\angle A = 120^0$ ہو تو $\angle C$ محسوب کیجیے۔



حل: ABCD دائروی چار ضلعی ہے۔

لہٰذا $\angle A + \angle C = 180°$

$120^0 + \angle C = 180°$

لہٰذا $\angle C = 180° - 120° = 60°$

What is the converse of the above theorem?

"If the sum of a pair of opposite angles of a quadrilateral is 180^0, then the quadrilateral is cyclic".

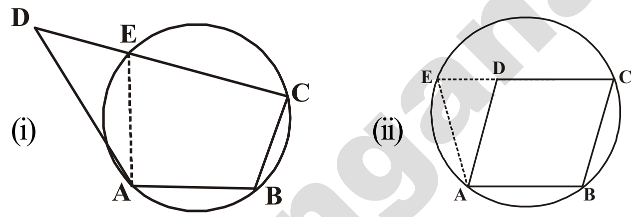
The converse is also true.

Theorem-12.7 : If the sum of any pair of opposite angles in a quadrilateral is 180^o, then it is cyclic.

Given : Let ABCD be a quadrilateral such that

$\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^o$



R.T.P. : ABCD is a cyclic quadrilateral.

Construction : Draw a circle through three non-collinear points A, B, and C.

If it passes through D, the theorem is proved since A, B, C and D are concyclic. If the circle does not pass through D, it intersects $\overline{CD}$ [fig (i)] or $\overline{CD}$ produced [fig (ii)] at E.

Draw $\overline{AE}$

Proof : ABCE is a cyclic quadrilateral (construction)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^o$ [sum of the opposite angles of a cyclic quadrilateral]

But $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ (Given)

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

But one of these is an exterior angle of ΔADE and the other is an interior opposite angle.

We know that the exterior angle of a triangle is always greater than either of the opposite interior angles.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ is a contradiction.

So our assumption that the circle passing through A, B and C does not pass through D is false.

$\therefore$ The circle passing through A, B, C also passes through D.

$\therefore$ A, B, C and D are concyclic. Hence ABCD is a cyclic quadrilateral.

Example-7. In figure, $\overline{AB}$ is a diameter of the circle, $\overline{CD}$ is a chord equal to the radius of the circle. $\overleftrightarrow{AC}$ and $\overleftrightarrow{BD}$ when extended intersect at a point E. Prove that $\angle AEB = 60°$.

Solution : Join O,C, join O,D and join B,C.

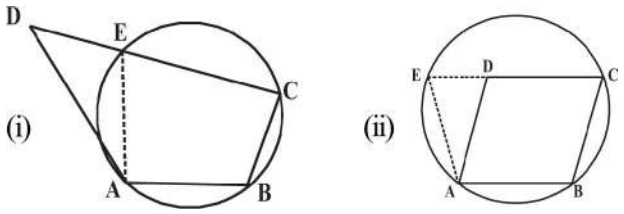
Triangle ODC is equilateral (Why?)

اس مسئلے کا برعکس مسئلہ کیا ہوگا؟

”اگر کسی چار ضلعی کے مخالف زاویوں کا حاصل جمع 180 ہو تو یہ چار ضلعی دائروی چار ضلعی ہوگا۔“

برعکس بیان بھی صحیح ہوگا۔

مسئلہ 12.7: کسی چار ضلعی میں مخالف زاویوں کا حاصل جمع 180 ہو تو یہ چار ضلعی دائروی چار ضلعی ہوگا۔



دیا گیا ہے: فرض کیجیے کہ ABCD ایک ایسا چار ضلعی ہے جس میں

$\angle ABC + \angle ADC = 180^0$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^0$

مطلوب: ABCD ایک دائروی چار ضلعی ہے۔

عمل: تین غیر ہم خط نقاط A، B اور C سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچیے۔ اگر یہ دائرہ نقطہ D سے بھی گزرتا ہو تو مسئلہ ثابت ہو جائے گا چوں کہ A، B، C اور D محیطی نقاط ہوں گے۔ اگر دائرہ نقطہ D سے نہ گزرتا ہو تو یہ $\overline{CD}$ کو E پر قطع کرے گا۔ [شکل (i) یا CD کو آگے بڑھانے پر حاصل خط شکل (ii)]

$\overline{AE}$ کھینچیے

ثبوت: ABCE ایک دائروی چار ضلعی ہے (عمل)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^0$ (محیطی چار ضلعی کے مخالف زاویوں کا مجموعہ)

$\angle ABC + \angle ADC = 180^0$ لیکن دیا گیا ہے کہ

$\therefore\ \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

لیکن ان میں سے ایک زاویہ مثلث ADE کا خارجی زاویہ ہے جب کہ دوسرا زاویہ داخلی مخالف کا زاویہ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کسی مثلث کا خارجی زاویہ ہمیشہ اس کے مخالف کے اندرونی زاویوں سے بڑا ہوتا ہے۔

لہٰذا $\angle AEC = \angle ADC$ ایک تضاد بیانی ہے۔

لہٰذا ہمارا مفروضہ کہ دیا ہوا دائرہ A، B اور C سے گزرتا ہے، لیکن D سے نہیں گزرتا، غلط ہے۔

لہٰذا مذکورہ دائرہ A، B، C کے علاوہ نقطہ D سے بھی گزرتا ہے۔

لہٰذا A، B، C اور D کے نقاط دائروی نقاط ہیں۔

لہٰذا ABCD ایک محیطی چار ضلعی ہے۔

مثال۔7: دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$ دائرے کا قطر ہے اور $\overline{CD}$ ایک ایسا وتر ہے جو کہ دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ کو کھینچنے پر یہ خطی خطوط نقطہ E کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زاویہ $\angle AEB=60^0$ ہوگا۔

حل: OC، OD اور BC کو ملائیے

مثلث ODC ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے (کیوں؟)

Therefore, $\angle COD = 60°$

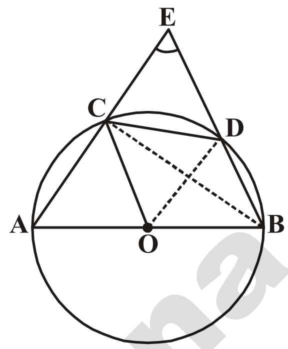
Now, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (Why?)

This gives $\angle CBD = 30°$

Again, $\angle ACB = 90°$ (Why?)

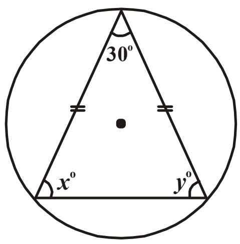
So, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

Which gives $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, i.e. $\angle AEB = 60°$

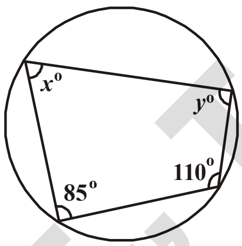


Exercise 12.5

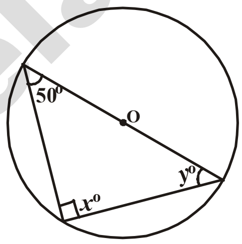
1. Find the values of x and y in the figures given below.



(i)



(ii)

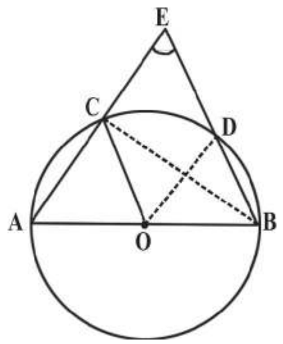


(iii)

2. Given that the vertices A, B, C of a quadrilateral ABCD lie on a circle.

   Also $\angle A + \angle C = 180°$, then prove that the vertex D also lie on the same circle.

3. If a parallelogram is cyclic, then prove that it is a rectangle.
4. Prove that a cyclic rhombus is a square.
5. For each of the following, draw a circle and inscribe the figure given. If a polygon of the given type can't be inscribed, write not possible.
   (a) Rectangle
   (b) Trapezium
   (c) Obtuse triangle
   (d) Non-rectangular parallelogram
   (e) Accute isosceles triangle
   (f) A quadrilateral PQRS with $\overline{PR}$ as diameter.



لہٰذا $\angle COD = 60^\circ$

(اب) $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$ کیوں؟

ہمیں حاصل ہوگا $\angle CBD = 30^\circ$

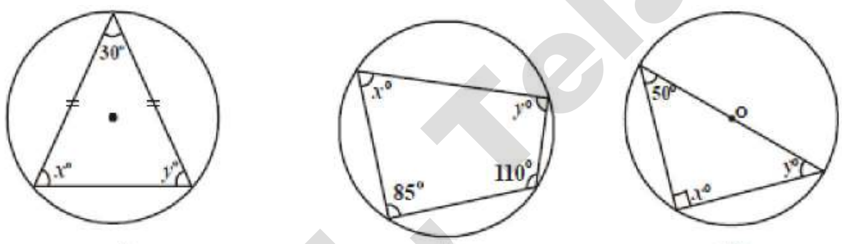
(لہٰذا) $\angle ACB = 90^\circ$ کیوں؟

اسلئے $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

ہمیں حاصل ہوگا $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$، یعنی $\angle AEB = 60^\circ$

مشق 12.5

1. دی ہوئی اشکال میں x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔



(i) (ii) (iii)

2۔ دیا گیا ہے کہ چار ضلعی ABCD کے نقاط A، B، C ایک دائرے پر واقع ہیں۔ اس کے علاوہ $\angle A + \angle C = 180^0$ ہو تو بتاؤ کہ راس D بھی اسی دائرے پر واقع ہوگا۔

3۔ ثابت کیجیے کہ ایک محیطی معین مربع ہوگا۔

4۔ اگر متوازی الاضلاع ہم دائروی ہو تو وہ مستقل ہوگا۔

5۔ ذیل میں سے ہر ایک لیے ایک دائرہ کھینچتے ہوئے شکل کو اندرونِ دائرہ بنائیے۔ دیئے ہوئے کثیر ضلعی میں سے کسی شکل کو دائرے پر نہ بنا پانے کی صورت میں ناممکن درج کیجیے۔

(a) مستطیل

(b) منحرف

(c) منفرجہ زاوئی مثلث

(d) غیر مستطیلی متوازی الاضلاع

(e) حادہ زاوئی مثلث مساوی الساقین

(f) ایک چار ضلعی PQRS جس میں PR قطر ہو

WHAT WE HAVE DISCUSSED?

G7P3R6

- A collection of all points in a plane which are at a fixed distance from a fixed point in the same plane is called a circle. The fixed point is called the centre and the fixed distance is called the radius of the circle
- A line segment joining any points on the circle is called a chord
- The longest of all chords which also passes through the centre is called a diameter.
- Circles with same radii are called congruent circles
- Circles with same centre and different radii are called concentric circles
- Diameter of a circle divides it into two semi-circles
- The part between any two points on the circle is called an arc
- The area enclosed by a chord and an arc is called a segment. If the arc is a minor arc then it is called the minor segment and if the arc is major arc then it is called the major segment
- The area enclosed by an arc and the two radii joining the end points of the arc with centre is called a sector
- Equal chords of a circle subtend equal angles at the centre
- Angles in the same segment are equal
- An angle in a semi circle is a right angle.
- If the angles subtended by two chords at the centre are equal, then the chords are congruent
- The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chords. The converse is also true
- There is exactly one circle passes through three non-collinear points
- The circle passing through the vertices of a triangle is called a circumcircle
- Equal chords are at equal distance from the centre of the circle, conversely chords at equidistant from the centre of the circle are equal in length
- Angle subtended by an arc at the centre of the circle is twice the angle subtended by it at any other point on the circle.
- If the angle subtended by an arc at a point on the remaining part of the circle is 90^o, then the arc is a semi circle.
- If a line segment joining two points subtends same angles at two other points lying on the same side of the line segment, the four points lie on the circle.
- The pairs of opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.

ہم نے کیا سیکھا؟

- کسی مستوی میں ایسے تمام نقاط کو جو اسی مستوی کے کسی مستقل نقطے سے مساوی فاصلے پر ہوں گے، دائرہ کہا جائے گا۔ اس مستقل نقطے کو دائرے کا مرکز اور مستقل فاصلے کو دائرے کا نصف قطر کہتے ہیں۔
- ایک خطی قطعہ جو دائرے کے نقاط کو ملاتا ہو، وتر کہلاتا ہے۔
- تمام وتروں میں سب سے بڑا وتر مرکز پر سے گزرتا ہے۔ اس وتر کو قطر کہتے ہیں۔
- ایسے دائروں کو جن کے نصف قطر مساوی ہوتے ہیں، مماثل دائرے کہتے ہیں۔
- ایسے دائرے جن کے مرکز مشترک اور نصف قطر متفرق ہوں ہم مرکز دائرے کہلائیں گے۔
- دائرے کا قطر دائرے کو دو نیم دائروں میں تقسیم کرتا ہے۔
- دائرے کے کوئی دو نقاط کے درمیانی منحنی فاصلے کو قوس کی لمبائی کہتے ہیں۔
- دائرے کے وتر اور قوس سے گھرے ہوئے حصے کو قطعہ کہتے ہیں۔ اگر یہ قوسِ اصغر سے گھرا ہوا ہو تو یہ قطعہ اصغر اور قوس اکبر سے گھرا ہوا ہو تو قطعہ اکبر کہلائے گا۔
- دائرے کا وہ حصہ جو دو نصف قطر اور قوس کے کناروں سے گھرا ہوا ہو قطاع دائرہ کہلاتا ہے۔
- دائرے کے مساوی وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- ایک ہی قطعہ میں پائے جانے والے زاویے بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- نیم دائرے کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
- اگر دو وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوں تو وتر بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- دائرے کے وتر پر مرکز سے گرائے گئے عمود وتر کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس کا برعکس بیان بھی صحیح ہوگا۔
- کوئی تین غیر ہم خط نقاط سے گزرنے والے دائروں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے۔
- ایسا دائرہ جو کسی مثلث کی راسوں سے گزرتا ہو محیطی دائرہ کہلاتا ہے۔
- دائرے کے مساوی وتر اس کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں گے۔ اسی طرح ایسے وتر جو دائرے کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں گے، مساوی ہوں گے۔
- دائرے کے مرکز پر کسی قوس سے بننے والا زاویہ دائرے کی دوسری جانب قوس سے بننے والے زاویے کا دگنا ہوگا۔
- کسی دائرے میں قوس سے بننے والا دوسری جانب کا زاویہ 90 ہو تو یہ شکل نیم دائرہ ہوگی۔
- دو نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ اگر دائرے کے اسی حصے پر پائے جانے والے دو نقاط سے مساوی زاویہ بناتا ہو تو چاروں نقاط دائرے پر واقع ہوں گے۔
- کسی محیطی چار ضلعی کے مخالف زاویوں کا حاصل جمع 180 درجہ ہوتا ہے۔ انھیں تکمیلی زاویے کہتے ہیں۔

Chapter

13

Geometrical Constructions

W3G5M1

13.1 Introduction

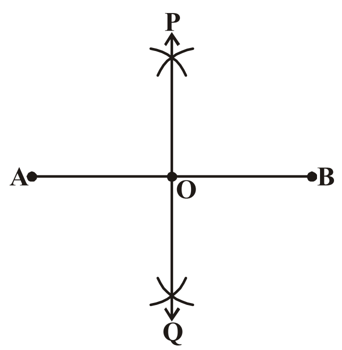
To construct geometrical figures, such as a line segment, an angle, a triangle, a quadrilateral etc., some basic geometrical instruments are needed. You must be having a geometry box which contains a graduated ruler (Scale) a pair of set squares, a divider, a compass and a protractor.

Generally, all these instruments are needed in drawing. A geometrical construction is the process of drawing a geometrical figure using only two instruments - an ungraduated ruler and a compass. We have mostly used ruler and compass in the construction of triangles and quadrilaterals in the earlier classes. In construction where some other instruments are also required, you may use a graduated scale and protractor as well. There are some constructions that cannot be done straight away. For example, when there are 3 measures available for the triangle, they may not be used directly. We will see in this chapter, how to extract the needed values and complete the required shape.

13.2 Basic Constructions

You have learnt how to construct (i) the perpendicular bisector of a line segment, (ii) angle bisector of 30°, 45°, 60°, 90° and 120° or of a given angle, in the lower classes. However the reason for these constructions were not discussed. The objective of this chapter is to give the process of necessary logical proofs to all those constructions.

13.2.1 To Construct the perpendicular bisector of a given line segment.



Example-1. Draw the perpendicular bisector of a given line segment AB and write justification.

Solution : Steps of construction.

Steps 1 : Draw the line segment AB

Step 2 : Taking A as a centre and with radius more than $\frac{1}{2}$ AB, draw an arc on either side of the line segment AB.

باب
13
جیومٹریہ بناوٹیں

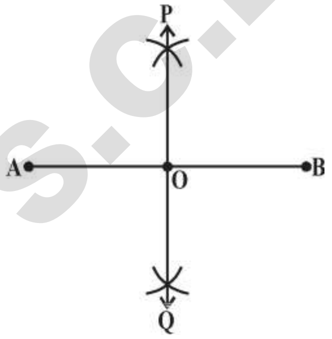
13.1 تعارف

جیومیٹرئ اشکال جیسے خطی قطعہ، زاویہ، مثلث، چار ضلعی وغیرہ کی بناوٹ کے لئے چند بنیادی جیومٹری آلات درکار ہوتے ہیں۔آپ کے پاس جیومٹری باکس ہوگا جس میں ایک درجہ دار پٹری، گنیوؤں کا ایک جوڑ، ایک قاسم ایک پرکار اور ایک چاندہ ہوتا ہے۔
عام طور پر یہہ تمام آلات اشکال بنانے کے لئے درکار ہوتے ہیں جیومٹریہ بناوٹیں، جیومٹری اشکال بنانے کا وہ عمل ہے جس میں صرف دو آلات غیر درجہ بند پٹری اور پرکار استعمال ہوتے ہیں۔ہم سابقہ جماعتوں میں مثلثات اور چار ضلعی کی بناوٹوں میں اکثر پٹری اور پرکار استعمال کر چکے ہیں۔بناوٹ میں جہاں ہم پٹری اور پرکار کو استعمال کرتے ہیں وہاں مزید دوسرے آلات کی بھی ضرورت پڑتی ہے۔یہاں چند بناوٹیں دی گئی ہیں۔جن کو ہم سیدھے سادھے طریقے سے نہیں بنا سکتے مثلاً جب مثلث کے لئے 3 پیمائشات دی گئی ہوں، تب ہم راست طور پر ان کا استعمال نہیں کر سکتے۔ہم اس باب میں یہہ دیکھیں گے کہ کس طرح درکار قدریں حاصل کریں گے اور مطلوبہ شکل کی تکمیل کریں گے۔

13.2 بنیادی بناوٹیں

پچھلی جماعتوں میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ کس طرح ایک (i) خطی قطعہ کا عمودی ناصف (ii) دئے گئے زاویہ 30^0، 45^0، 60^0، 90^0 اور 120^0 کے زاویائی ناصف کھینچے جاتے ہیں اس طرح کی تمام بناوٹوں کے عمل کے لئے درکار منطقی ثبوت بہم پہنچانا اس باب کا اہم مقصد ہے۔

13.2.1 خطی قطعہ کا عمودی ناصف کھینچنا



مثال 1: دیئے گئے خطی قطعہ AB کا عمودی ناصف کھینچئے اور اس کی وضاحت کیجئے۔

حل: بناوٹ کے مراحل:

مرحلہ 1: خطی قطعہ AB کھینچئے

مرحلہ 2: پرکار کی مدد سے A کو مرکز مان کر $\overline{AB}$ کے نصف سے زیادہ کی پیمائش لے کر خطی قطعہ AB کی دونوں جانب ایک ایک قوس کھینچئے

Step 3 : Taking 'B' as centre, with the same radius as above, draw arcs so that they intersect the previously drawn arcs.

Step 4 : Mark these points of intersection as P and Q. Join P and Q.

Step 5 : Let PQ intersect $\overline{AB}$ at the point O

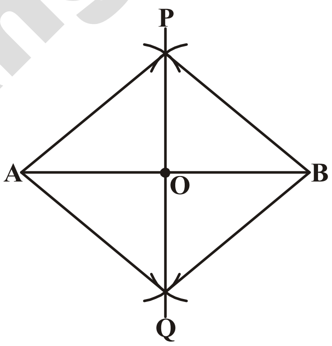
Thus the line POQ is the required perpendicular bisector of AB.

How can you justify the above construction made i.e. "PQ is the perpendicular bisector of AB".

Draw diagram of construction and join A to P and A to Q; also B to P and B to Q.

We use the congruency of triangle properties to prove the required.

Proof :



Steps	**Reasons**
In Δ^s PAQ and ΔPBQ	(Selected triangle)
AP = BP ; AQ = BQ	(Equal radii)
PQ = PQ	(Common side)
$\therefore$ ΔPAQ $\cong$ ΔPBQ	(SSS rule)
So $\angle APO = \angle BPO$	(CPCT (corresponding parts of congruent triangles))
Now In Δ^s APO and BPO	
AP = BP	(Equal radii)
$\angle APO = \angle BPO$	(Proved above)
OP = OP	(Common side)
$\therefore$ $\Delta APO \cong \Delta BPO$	(SAS rule)
So OA = OB and $\angle APO = \angle BPO$	(CPCT)
As $\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$	(Linear pair)
and $\angle APO = \angle BPO$	
We get $\angle AOP = \angle BOP = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$	(From the above result)

Thus PO, i.e. $\overleftrightarrow{POQ}$ is the perpendicular bisector of AB.

Hence proved.

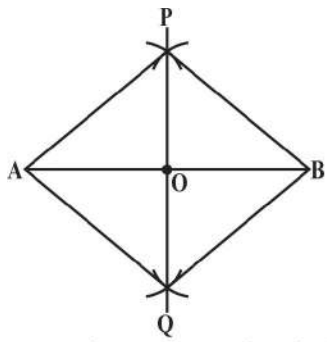
مرحلہ 3: B کومرکز مان کر مندرجہ بالا پیمائش سے دو قوس اس طرح کھینچئے کہ یہہ پہلے کھینچے گئے قوس کو قطع کریں۔

مرحلہ 4: قوسوں کے نقطہ تقاطع کو P اور Q کا نام دیجئے۔ P اور Q کو ملایئے

مرحلہ 5: فرض کیجئے کہ PQ، $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے پس خط $\overleftrightarrow{PQ}$، AB کا مطلوبہ عمودی ناصف ہے۔ آپ مندرجہ بالا بناوٹ یعنی $\overleftrightarrow{PQ}$، AB کا عمودی ناصف ہے کو منطقی طور پر کس طرح ثابت کریں گے؟

بناوٹ کی شکل میں A سے P اور Q کو ملایئے اسی طرح B سے P اور Q کو ملایئے۔

مطلوبہ ثبوت کے لئے ہم مثلث کی متماثلی خاصیت کو استعمال کرتے ہیں۔



ثبوت:-

مراحل	وجوہات
مثلثات PAQ اور PBQ میں	(منتخب مثلثات)
$AP=BP$; $AQ = BQ$	(مساوی نصف قطر)
$PQ = PQ$	(مشترک ضلع)
$\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	(SSS اُصول)
اسلئے $\angle APO = \angle BPO$	(CPCT متماثل مثلثات کے متناظر حصے)
اب مثلثات APO اور BPO میں	
$AP=BP$	(مساوی نصف قطر)
$\angle APO = \angle BPO$	(ثابت کیا گیا)
$OP = OP$	(مشترک ضلع)
$\Delta APO \cong \Delta BPO$	(SAS اُصول)
اس لئے $OA=OB$ اور $\angle APO = \angle BPO$	(CPCT)
جیسا کہ $\angle APO + \angle BPO=180^0$	خطی جوڑ
اور $\angle APO = \angle BPO$	
ہمیں حاصل ہوتا ہے۔	
$\angle AOP + \angle BOP = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$	(مندرجہ بالا نتیجہ)
پس PO یعنی POQ، AB کا عمودی ناصف ہے	
لہٰذا ثابت ہوا۔	

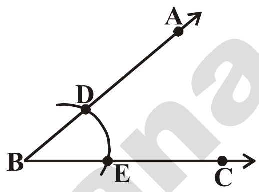
13.2.2 To construct the bisector of a given angle

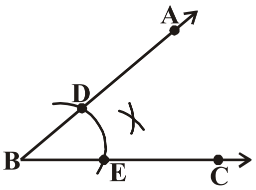
Example-2. Construct the bisector of a given angle $\angle ABC$.

Solution : Steps of construction.

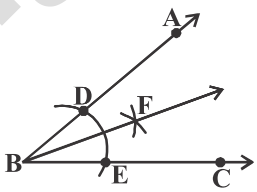
Step 1 : Draw the given angle $\angle ABC$

Step 2 : Taking B as centre and with any radius, draw an arc to intersect the rays $\overrightarrow{BA}$ and $\overrightarrow{BC}$, at D and E respectively, as shown in the figure.





Step 3 : Taking E and D as centres draw two arcs with equal radii to intersect each other. Let the point of intersection be F.

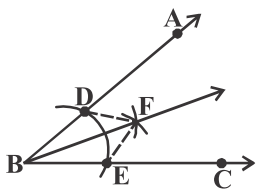


Step 4 : Draw the ray BF. It is the required bisector of $\angle ABC$.

Let us see the logical proof of above construction. Join D, F and E, F. (We use congruency rule of triangles to prove the required).

Proof :

Steps	**Reasons**
In Δ^s BDF and ΔBEF	(Selected triangles)
BD = BE	(radii of same arc)
DF = EF	(Arcs of equal radii)
BF = BF	(Common side)
$\therefore \Delta BDF \cong \Delta BEF$	(SSS rule)
So $\angle DBF = \angle EBF$	(CPCT)



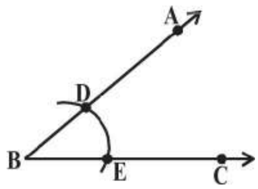
Thus BF is the bisector of $\angle ABC$

$\therefore$ Hence proved.

13.2.2 دیئے گئے زاویہ کا زاویئی ناصف تشکیل دینا

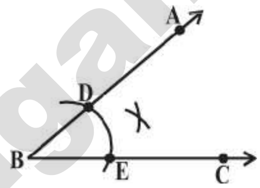
مثال 2: دیئے گئے زاویہ ABC کا زاویئی ناصف بنانا

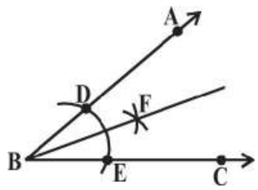
حل: بناوٹ کے مراحل



مرحلہ 1: دیا گیا زاویہ ABC بنایئے

مرحلہ 2: B کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر سے شعاعیں $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ پر ایک قوس کھینچیے جو بالترتیب نقاط D اور E پر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

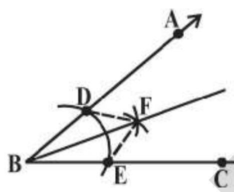




مرحلہ 3: E اور D کو مرکز مان کر مساوی نصف قطروں سے دو قوس اس طرح کھینچیے جو F پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں۔

مرحلہ 4: شعاع BF کھینچیے ۔ یہہ $\angle ABC$ کا مطلوبہ زاویئی ناصف ہے۔

آیئے اب ہم مندرجہ بالا بناوٹ کا منطقی ثبوت دیکھیں گے۔ D سے F اور E سے F کو ملایئے۔ (مطلوبہ ثبوت کے لئے ہم مثلثات کی متماثلی خاصیت کو استعمال کریں گے۔)



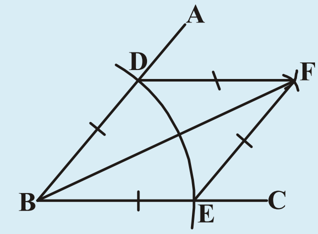
مراحل	وجوہات
مثلثات BDF اور BEF میں	(منتخبہ مثلثات)
BD = BE	(مساوی قوس والے نصف قطر)
DF = EF	(مساوی نصف قطروں والے قوس)
BF = BF	(مشترک ضلع)
$\Delta BDF \cong \Delta BEF$	(SSS اُصول)
اسلئے $\angle DBF = \angle EBF$	(CPCT)

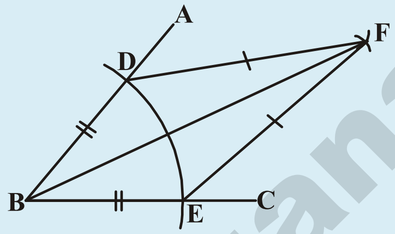
پس BF، $\angle ABC$ کا زاویئی ناصف ہے

لہٰذا ثابت ہوا۔

TRY THESE

Observe the sides, angles and diagonals of quadrilateral BEFD. What type of figures are given below and write properties of figures.

1. 

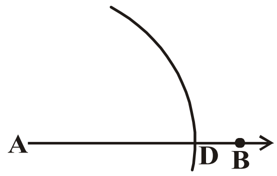
2. 

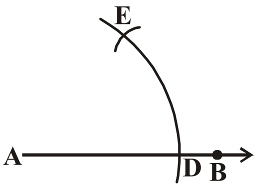
13.2.3 To construct an angle of 60° at the initial point of a given ray.

Example-3. Draw a ray AB (with initial point A) and construct a ray AC such that $\angle BAC = 60°$.

Solution : Steps of Construction

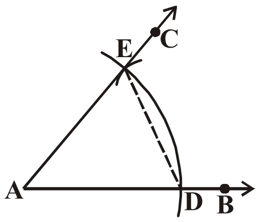
Step 1 : Draw the given ray AB and taking A as centre and some radius, draw an arc which intersects AB, say at a point D.





Step 2 : Taking D as centre and with the same radius taken before, draw an arc intersecting the previously drawn arc, say at a point E (as shown in the fig.)

Step 3 : Draw a ray $\overrightarrow{AC}$ Passing through E then $\angle BAC$ is the required angle of $60°$.

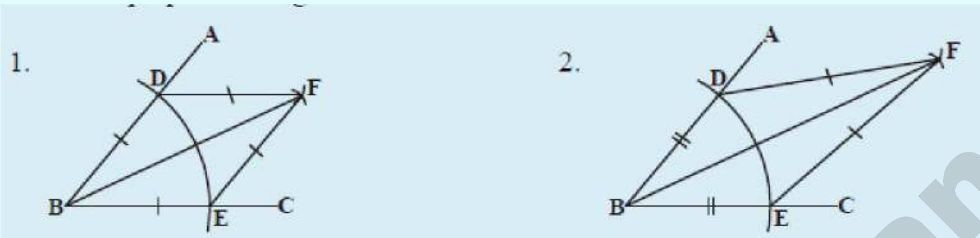


Let us see how the construction is justified. Draw the figure again and join D,E and prove it as follows .

Steps	Reasons
In Δ ADE	
AE = AD	(radii of same arc)
AD = DE	(Arcs of equal radius)
Then AE = AD = DE	(Same arc with same radii)
$\therefore$ ΔADE is equilateral triangle	(All sides are equal)
$\angle EAD = 60°$	(each angle of equilateral triangle)
$\angle BAC = \angle EAD$	($\angle EAD$ is a part of $\angle BAC$)
$\angle BAC = 60°$.	Hence proved.

کوشش کیجئے

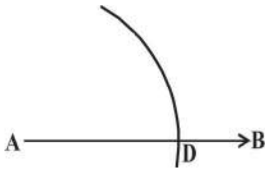
چار ضلعی BEFD کے اضلاع، زاویئے اور وتروں کا مشاہدہ کیجئے مندرجہ ذیل اشکال کے نام دیجئے اور ان کی خصوصیات لکھئے



13.2.3 دی گئی شعاع کے ابتدائی نقطہ پر 60^0 کا زاویہ بنانا

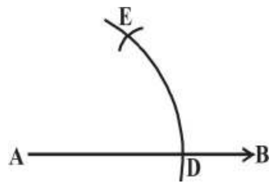
مثال 3: ابتدائی نقطہ A سے ایک شعاع AB اور ایک شعاع AC اس طرح کھینچئے کہ $\angle BAC = 60^0$

حل: بناوٹ کے مراحل

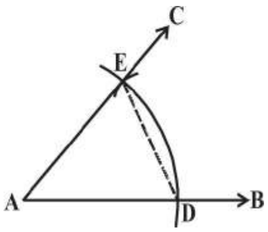


مرحلہ 1: شعاع AB کھینچئے اور A کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر سے ایک قوس کھینچئے جو AB کو قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ نقطہ D ہے۔

مرحلہ 2: D کو مرکز مان کر پہلے لئے گئے نصف قطر کی پیائش سے ایک قوس اس طرح کھینچئے جو پہلے کھینچے گئے قوس کو قطع کرتا ہو۔ قوسوں کے نقطہ تقاطع کو E کا نام دیجئے۔ (جیسا کہ شکل میں دیکھا گیا ہے۔)



مرحلہ 3: ایک شعاع AC کھینچئے جو کہ E سے گذرتی ہو $\angle BAC$ مطلوبہ 60^0 کا زاویہ ہے۔



آیئے اب ہم دیکھیں گے کہ یہہ بناوٹ کس حد تک درست ہے۔ شکل کو دوبارہ اتاریے۔ D اور E کو ملایئے اور اس کو ذیل کی طرح ثابت کیجئے۔

مراحل	وجوہات
مثلث ADE میں	(منتخب شدہ)
AE = AD	(مساوی نصف قطر کی قوس)
AD = DE	(مساوی نصف قطر والے قوس)
AE = AD = DE	(مساوی نصف قطر والے مساوی قوس)
اسلئے Δ ADE ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے	(تمام اضلاع مساوی ہیں)
$\angle EAD = 60^0$	(مساوی الاضلاع مثلث کا ہر ایک زاویہ)
$\angle BAC$ یکساں ہے $\angle EAD$	($\angle EAD$، $\angle BAC$ کا ایک حصہ ہے)
$\angle BAC = 60^0$	

لہٰذا ثابت ہوا۔

Try This

Draw a circle, Identify a point on it. Cut arcs on the circle with the length of the radius in succession. How many parts can the circle be divided into? Give reason. What will be the length of the choad?

Exercise - 13.1

1. Construct the following angles at the initial point of a given ray and justify the construction.

   (a) 90^o (b) 45^o

2. Construct the following angles using ruler and compass and verify by measuring them by a protractor.

   (a) 30^o (b) $22\frac{1}{2}^o$ (c) 15^o

   (d) 75^o (e) 105^o f) 135^o

3. Construct an equilateral triangle, given its side of length of 4.5 cm and justify the construction.

4. Construct an isosceles triangle, given its base and base angle and justify the construction.

   [Hint : You can take any measure of side and angle]

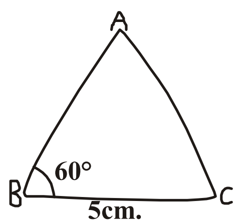
13.3 Construction of triangles (Special cases)

We have so far, constructed some basic constructions and justified with proofs. Now we will construct some triangles when special type of measures are given. Recall the congruency properties of triangles such as SAS, SSS, ASA and RHS rules. You have already learnt how to construct triangles in class VII using the above rules.

You may have learnt that at least three parts of a triangle have to be given for constructing it but not any combinations of three measures are sufficient for the purpose. For example, if two sides and an angle (not the included angle) are given, then it is not always possible to construct such a triangle uniquely. We can give several illustrations for such constructions. In such cases we have to use the given measures with desired combinations such as SAS, SSS, ASA and RHS rules.

13.3.1 Construction : To construct a triangle, given its base, a base angle and sum of other two sides.

Example-4. Construct a ΔABC given BC = 5 cm., AB + AC = 8 cm. and $\angle ABC = 60^\circ$.



Solution : Steps of construction

کوشش کیجئے

ایک دائرہ بنائیے اس پر ایک نقطہ کی نشاندہی کیجئے۔ نصف قطر کے طول سے یکے بعد دیگرے دائرہ پر قوس بناتے جائیے۔ دائرہ کتنے حصوں میں تقسیم ہوگا۔ وجہ بتلائیے۔

مشق 13.1

1. دی گئی شعاع کے ابتدائی نقطہ سے حسب ذیل زاویے بنائیے اور بناوٹ کی تصدیق کیجئے۔

(a) 90^o (b) 45^o

2. پٹری اور پرکار کی مدد سے حسب ذیل زاویے بنائیے اور چاندے کی مدد سے ان کی پیائش کرتے ہوئے جانچ کیجئے۔

(a) 30^o (b) $22\frac{1}{2}^o$ (c) 15^o

(d) 75^o (e) 105^o f) 135^o

3. مساوی الاضلاع مثلث بنائیے جب کہ اس کے ایک ضلع کا طول 4.5 سمر دیا گیا ہے۔ اور بناوٹ کی وضاحت کیجئے۔

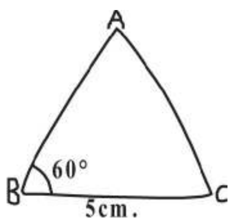
4. مساوی الساقین مثلث بنائیے جبکہ اس کا قاعدہ اور قاعدہ کا زاویہ دیا گیا ہے۔ اور بناوٹ کی وضاحت کیجئے۔
(اشارہ: ضلع اور زاویہ کے لئے آپ کوئی بھی پیائش لے سکتے ہیں)

13.3 مثلث کی بناوٹ (مجموعی صورتحال)

اب تک ہم جیومیٹری کے چند بنیادی اشکال بنا چکے ہیں اور ثبوت کے ذریعہ ان کی تصدیق بھی کر چکے ہیں۔ اب ہم مخصوص پیائش دینے پر چند مثلثات تشکیل دیں گے۔ مثلثات کی متماثلی خصوصیات جیسے SAS، SSS، ASA اور RHS اُصولوں کا اعادہ کیجئے۔ آپ جماعت ہفتم میں مندرجہ بالا اُصولوں کے استعمال سے مثلثات کی بناوٹ سیکھ چکے ہیں۔

آپ نے یہ بھی سیکھا ہوگا کہ ایک مثلث کی بناوٹ کے لئے کم از کم تین غیر منحصر پیائشوں کی ضرورت ہوتی ہے لیکن اس مقصد کے لئے کوئی بھی تین پیائشوں کا امتزاج کافی نہیں ہوتا۔ مثلاً دو ضلعے اور ایک زاویہ (ان دونوں کے درمیان واقع نہ ہو) دیا گیا ہو تب ہمیشہ یہ ممکن نہیں کہ ایک منفرد مثلث بنایا سکے۔ ایسی بناوٹوں کے لئے ہم کئی توضیحات دے سکتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں ہمیں دی گئی پیائشات کو اپنے پسندیدہ امتزاج جیسے SAS، SSS، ASA، اور RHS کے اُصول کے ساتھ استعمال کرنا ہوتا ہے۔

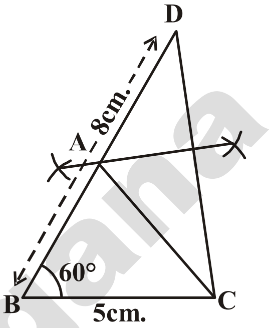
13.3.1 بناوٹ: ایک مثلث بنانا، جبکہ قاعدہ، قاعدہ کا زاویہ اور دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ دیا گیا ہو۔



مثال 4: ΔABC بنائیے جبکہ $BC=$ 5 سمر، $AB+AC=$ 8 سمر اور $\angle ABC=60^0$ دیا گیا ہے۔

حل: بناوٹ کے مراحل

Step 1 : Draw a rough sketch of ΔABC and mark the given measurements as usual.
(How can you mark $AB + AC = 8cm$?)
How can you locate third vertex A in the construction ?



Analysis : As we have $AB + AC = 8$ cm., extend BA up to D so that $BD = 8$ cm.

$\therefore\ BD = BA + AD = 8$ cm

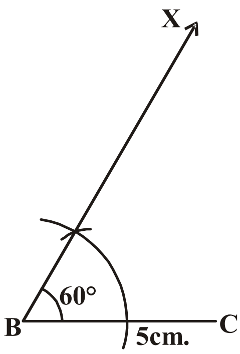
but $AB + AC = 8$ cm. (given)

$\therefore\ AD = AC$

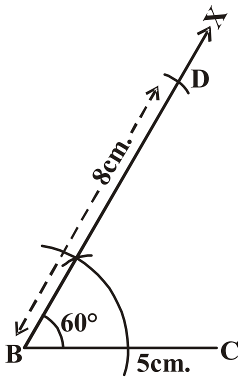
To locate A on BD what will you do ?

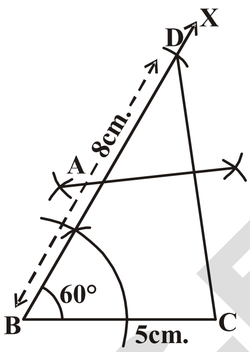
As A is equidistant from C and D, draw a perpendicular bisector of $\overline{CD}$ to locate A on $\overline{BD}$.

How can you prove $AB + AC = BD$?



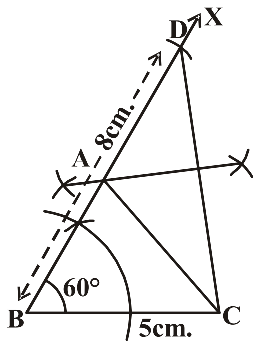
Step 2 : Draw the base BC= 5 cm and construct $\angle CBX = 60^\circ$ at B





Step 3: With centre B and radius 8 cm ($AB + AC = 8$ cm) draw an arc on $\overrightarrow{BX}$ to intersect (meet) at D.

Step 4 : Join C, D and draw a perpendicular bisector of CD to meet BD at A



Step 5 : Join A,C to get the required triangle ABC.

Now, we will justify the construction.

Proof : A lies on the perpendicular bisector of $\overline{CD}$

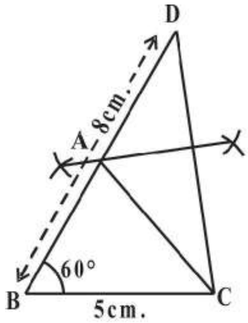
$\because\ AC = AD$

$AB + AC = AB + AD$

$= BD$

$= 8$ cm.

Hence ΔABC is the required triangle.



مرحلہ 1: ΔABC کا کچا خاکہ بنائیے اور حسب معمول دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجئے

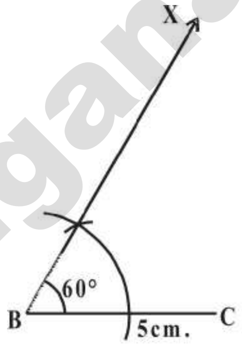
(آپ AB+AC=8cm کی کس طرح نشاندہی کریں گے؟)

بناوٹ میں آپ تیسرے راس A کی کس طرح نشاندہی کریں گے؟

تجزیہ جیسا کہ ہمیں 8 سمر=AB+AC دیا گیا ہے BA کو D تک اس طرح بڑھائیے کہ BD=8 cm ہو۔

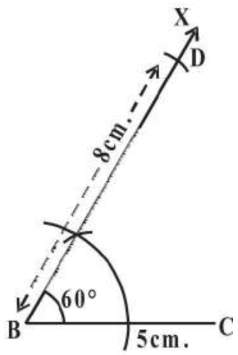
لیکن AB+AC=8cm دیا گیا ہے۔

AD = AC



A کی BD پر نشاندہی کے لئے آپ کیا کریں گے؟

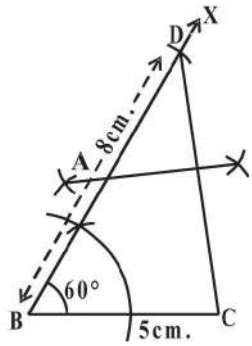
جیسا کہ A، C اور D سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے BD پر A کی نشاندہی کے لئے ایک عمودی ناصف $\overline{CD}$ کھینچئے۔



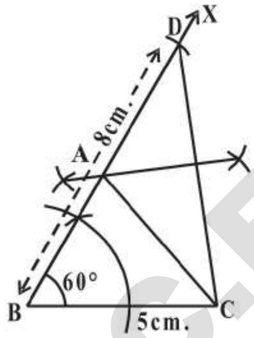
آپ AB+AC=BD کس طرح ثابت کریں گے۔

مرحلہ 2: قاعدہ $\overline{BC}$=5 سمر کھینچئے اور B پر $\angle CBX=60^0$ بنائیے

مرحلہ 3: B کو مرکز مان کر نصف قطر 8 سمر (AB+AC=8cm) کی پیمائش سے $\overrightarrow{BX}$ پر ایک قوس کھینچئے جو D پر قطع کرتا ہے۔



مرحلہ 4: CD کو ملائیے اور CD کا عمودی ناصف کھینچئے جو BD کو A پر قطع کرتا ہے۔



مرحلہ 5: AC کو ملائیے تاکہ مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہو سکے۔

اب ہم اس بناوٹ کی وضاحت کریں گے۔

$$\because \quad AC = AD$$
$$AB + AC = AB + AD$$
$$= BD$$
$$= 8 \text{ cm.}$$

ثبوت: A، $\overline{CD}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

پس ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

Think, Discuss and Write

Can you construct a triangle ABC with BC = 6 cm, $\angle B = 60^\circ$ and $AB + AC = 5$cm.? If not, give reasons.

13.3.2 Construction : To Construct a triangle given its base, a base angle and the difference of the other two sides.

Given the base BC of a triangle ABC, a base angle say $\angle B$ and the difference of other two sides AB – AC in case AB>AC or AC-AB, in case AB<AC, you have to construct the triangle ABC. Thus we have two cases of constructions discussed in the following examples.

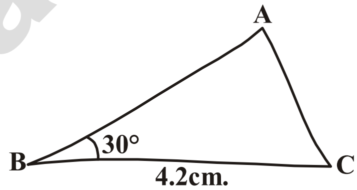
Case (i) Let AB > AC

Example-5. Construct ΔABC in which BC = 4.2 cm, $\angle B = 30^\circ$ and AB – AC = 1.6 cm

Solution : Steps of Construction

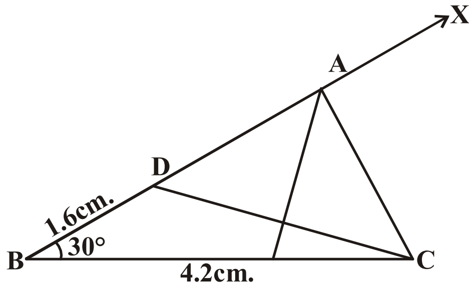
Step 1: Draw a rough sketch of ΔABC and mark the given measurements

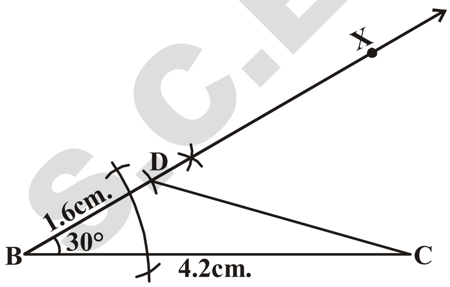
(How can you mark AB – AC = 1.6 cm ?)



Analysis : Since AB – AC = 1.6 cm and AB > AC, mark D on AB such that AD = AC Now BD = AB – AC = 1.6 cm. Join CD and draw a perpendicular bisector of CD to find the vertex A on BD produced.

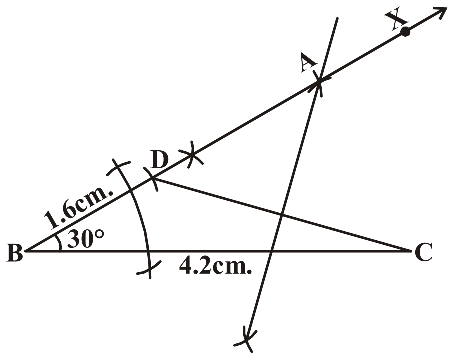
Join AC to get the required triangle ABC.





Step 2: Construct ΔBCD using SAS rule with measures BC = 4.2 cm $\angle B = 30^0$ and BD=1.6 cm. (i.e. AB - AC)

Step 3 : Draw the perpendicular bisector of CD. Let it meet ray BDX at a point A.



سوچئے - بحث کیجئے اور لکھئے

کیا آپ $BC=6$ cm ، $\angle B=60^0$ اور $AB+AC=5$ cm پیمائشات سے مثلث ABC بنا سکتے ہیں؟ اگر نہیں تب وجوہات بیان کیجئے۔

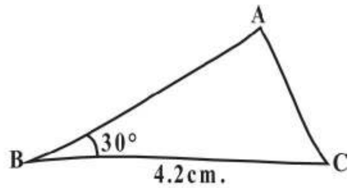
13.3.2 بناوٹ: مثلث بنانا جسکا قاعدہ، قاعدے کا زاویہ اور دو اضلاع کا فرق دیا گیا ہو

مثلث ABC کا قاعدہ BC دیا گیا ہے۔ قاعدے کا زاویہ $\angle B$ اور دوسرے دو ضلعے کا فرق AB - AC کا اس صورت میں جبکہ AB>AC یا AC-AB اور جب کہ AB<AC دیا گیا ہو تب آپ کو ایک مثلث ABC بنانا ہے پس ہمارے پاس بناوٹوں کی دو صورتیں ہیں۔

صورت (i) فرض کرو کہ AB>AC

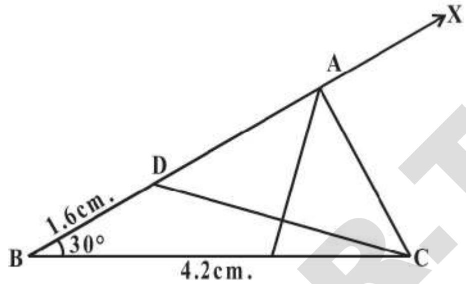
مثال 5: ΔABC بنائیے جہاں $BC=4.2$ cm، $\angle B=30^0$ اور $AB-AC=1.6$ cm

حل: بناوٹ کے مراحل

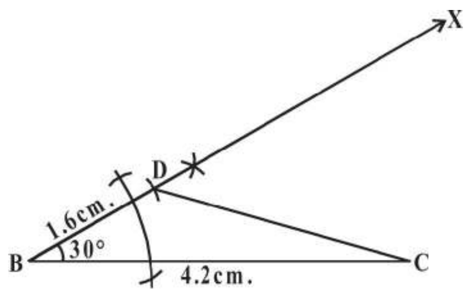


مرحلہ 1: ΔABC کا کچا خاکہ بنائیے اور دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجئے۔

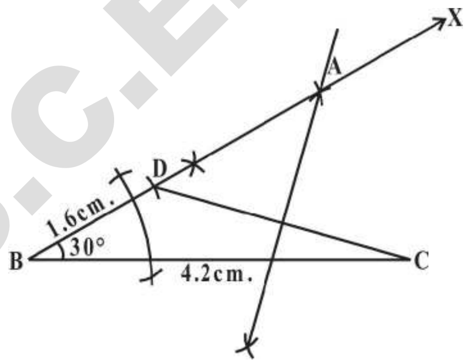
(آپ AB-AC=1.6cm کی کس طرح نشاندہی کریں گے)



تجزیہ: چوں کہ AB-AC=1.6cm اور AB>AC ہے اب D کی نشاندہی اس طرح کیجئے کہ BD=AB-AC=1.6 cm، CD کو ملائیے اور BD کے بڑھتے ہوئے حصے پر A کی نشاندہی کے لئے CD کا عمودی ناصف کھینچئے۔ AC کو ملائیے ہمیں مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوتا ہے۔

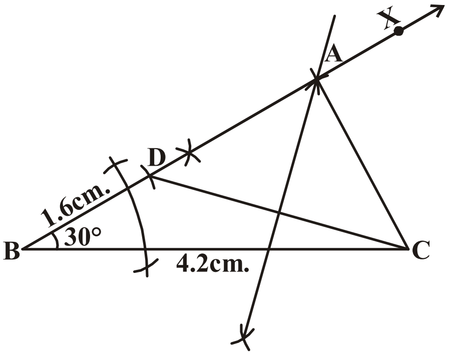


مرحلہ 2: SAS اُصول کے استعمال اور پیمائشات BC = 4.2 cm، $\angle B=30^0$ اور BD=1.6 cm (یعنی AB-AC) سے ایک مثلث ABC بنائیے۔



مرحلہ 3: CD کا عمودی ناصف کھینچئے فرض کیجئے کہ وہ شعاع BDX کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔

Step 4: Join AC to get the required triangle ABC.



THINK, DISCUSS AND WRITE

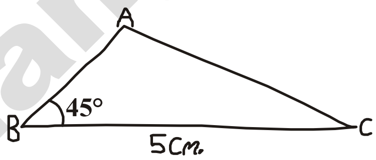
Can you construct the triangle ABC with the same measures by changing the base angle $\angle C$ instead of $\angle B$? Draw a rough sketch and construct it.

Case (ii) Let AB < AC

Example-6. Construct ΔABC in which BC = 5cm, $\angle B = 45^{o}$ and AC – AB = 1.8 cm.

Solution : Steps of Construction.

Step 1: Draw a rough sketch of ΔABC and mark the given measurements.



Analyse how AC – AB = 1.8 cm can be marked?

Analysis : Since AC – AB = 1.8 cm i.e. AB < AC we have to find D on AB produced such that AD = AC

Now BD = AC – AB = 1.8 cm ($\because$ BD = AD – AB and AD = AC)

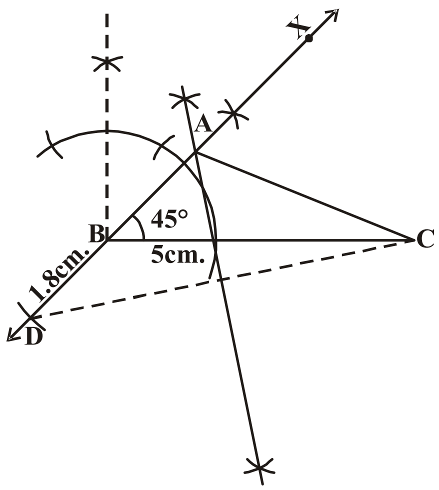
Join CD to find A on the perpendicular bisector of DC

Step 2 : Draw BC = 5 cm and construct $\overrightarrow{BX}$ such that $\angle CBX = 45°$

With centre B and radius 1.8 cm (BD = AC – AB) draw an arc to intersect the line XB extended at a point D.

Step 3 : Join D, C and draw the perpendicular bisector of DC.

Step 4 : Let it meet $\overrightarrow{BX}$ at A and join A, C ΔABC is the required triangle.



Now, you can justify the construction.

Proof: In ΔABC, the point A lies on the perpendicular bisector of $\overline{DC}$.

$\therefore$ AD = AC

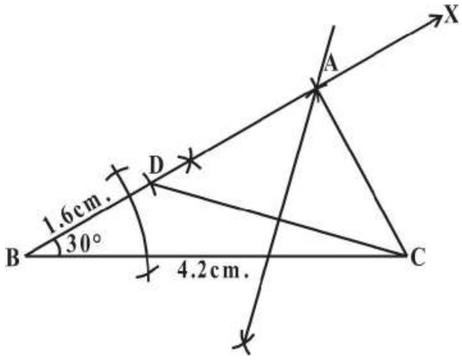
AB + BD = AC

So BD = AC – AB

= 1.8 cm

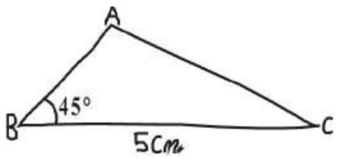
Hence ΔABC is the required that triangle.

مرحلہ 4: AC کو ملائیے ہمیں مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوتا ہے۔



سوچیے - بحث کیجئے اور لکھئے

کیا آپ ان ہی پیمائشات کے ساتھ قاعدہ کے زاویہ کو B کے بجائے $\angle C$ لیتے ہوئے ایک مثلث ABC بنا سکتے ہیں؟ ایک کچا خاکہ بناتے ہوئے مثلث بنائیے



صورت (ii) فرض کرو کہ AB<AC

مثال 6: ایک مثلث ABC بنائیے جہاں BC=5cm $\angle B=45^0$ اور AC-AB=1.8 cm

حل: بناوٹ کے مراحل

مرحلہ 1: ΔABC کا کچا خاکہ بنائیے دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجئے۔

تجزیہ کیجئے کہ AC-AB=1.8cm کی نشاندہی کیسے کی جاسکتی ہے۔

تجزیہ: چونکہ AC-AB 1.8cm یعنی AB<AC یعنی ہمیں آگے بڑھاتے ہوئے AB پر D کی نشاندہی اس طرح کرنا ہوگا کہ AD=AC ہو۔

اب BD=AC-AB=1.8 cm (چونکہ BD=AD-AB اور AD=AC)

CD کو ملائیے تاکہ عمودی ناصف DC پر A معلوم کیا جاسکے۔

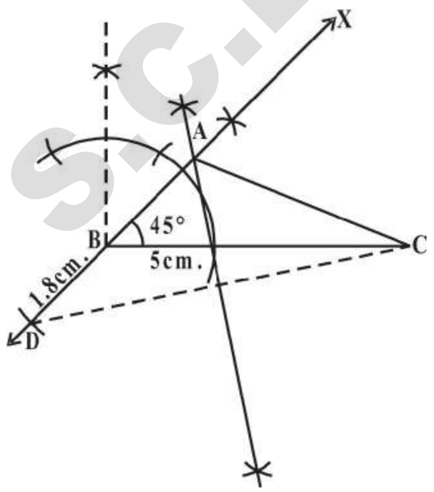
مرحلہ 2: BC=5cm کھینچئے اور $\overline{BX}$ پر $\angle CBX=45^0$ بنائیے۔

B کو مرکز مان کر 1.8 سمر نصف قطر (BD=AC-AB) سے ایک قوس XB سے بڑھائے گئے خط پر کھینچئے جو D پر قطع کرتا ہے۔

مرحلہ 3: DC کو ملائیے اور DC کا عمودی ناصف کھینچئے

مرحلہ 4: فرض کیجئے کہ وہ $\overleftrightarrow{BX}$ کو A پر قطع کرتا ہے۔ AC کو ملائیے۔ اس طرح ΔABC ہی مطلوبہ مثلث ہے۔

اب آپ اس بناوٹ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔



ثبوت: DABC میں نقطہ A عمودی ناصف $\overline{DC}$ پر واقع ہوتا ہے۔

$$\therefore\ AD = AC$$

$$AB + BD = AC$$

اس طرح $BD = AC - AB$

$$= 1.8\text{ cm}$$

لہٰذا ΔABC ہی مطلوبہ مثلث ہے

13.3.3 Construction : To construct a triangle, given its perimeter and its two base angles.

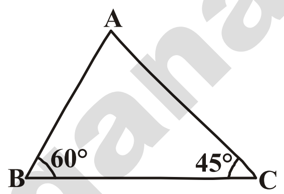
Given the base angles, say $\angle B$ and $\angle C$ and perimeter AB + BC + CA, you have to construct the triangle ABC.

Example-7. Construct a triangle ABC, in which $\angle B = 60^o$, $\angle C = 45^o$ and

AB + BC + CA = 11 cm.

Solution : Steps of construction.

Step 1 : Draw a rough sketch of a triangle ABC and mark the given measures

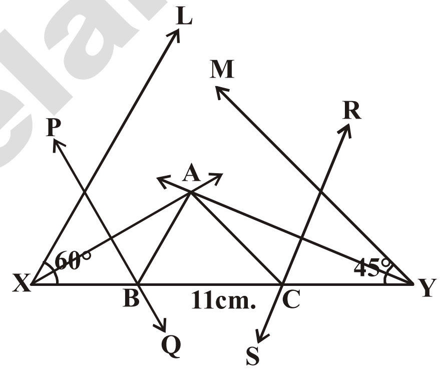


(Can you mark the perimeter of triangle ?)

Analysis : Draw a line segment, say XY equal to perimeter of ΔABC i.e., AB + BC + CA. Make angles $\angle YXL$ equal to $\angle B$ and $\angle XYM$ equal to $\angle C$ and bisect them.

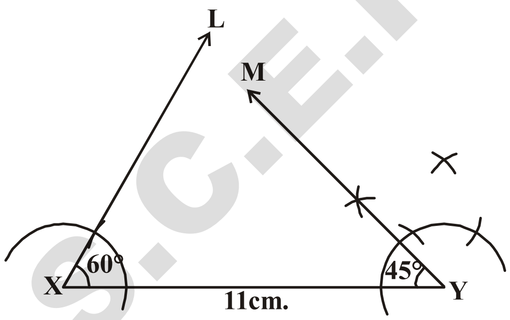
Let these bisectors intersect at a point A.

Draw perpendicular bisectors of $\overrightarrow{AX}$ to intersect XY at B and the perpendicular bisector of $\overrightarrow{AY}$ to intersect it at C. Then by joining AB and AC, we get required triangle ABC.



Step 2: Draw a line segment XY = 11 cm

(As XY = AB + BC + CA)



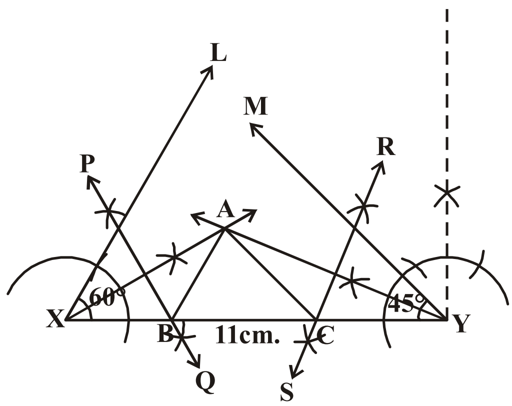
Step 3 : Construct $\angle YXL = 60^o$ and $\angle XYM = 45^o$ and draw bisectors of these angles.

Step 4 : Let the bisectors of these angles intersect at a point A and join AX or AY.

Step 5 : Draw perpendicular bisectors of $\overline{AX}$ and $\overline{AY}$ to intersect $\overleftrightarrow{XY}$ at B and C respectively

Join A, B and A, C.

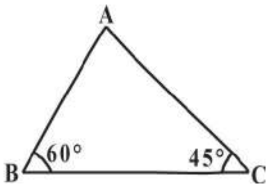
Then, ABC is the required triangle.



13.3.3 بناوٹ: مثلث بنانا جبکہ اس کا احاطہ اور قاعدے کے دو زاویئے دیئے گئے ہوں

قاعدے کے زاویئے $\angle B$ اور $\angle C$ اور احاطہ $AB+BC+CA$ دیا گیا ہے۔ آپ کو مثلث ABC بنانا ہے

مثال 7: ایک مثلث ABC بنائیے جس میں $\angle B=60^0$، $\angle C=45^0$ اور $AB+BC+CA=11$ cm

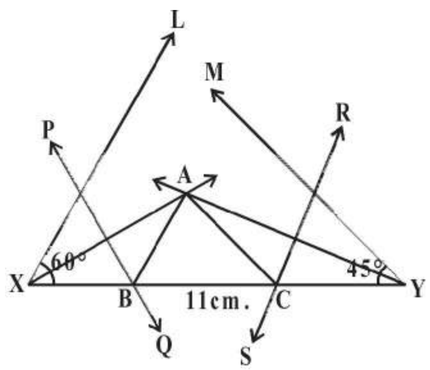


حل: بناوٹ کے مراحل

مرحلہ 1: مثلث ABC کا کچا خاکہ بنائیے دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجئے۔

(کیا آپ احاطہ کی نشاندہی کر سکتے ہیں؟)

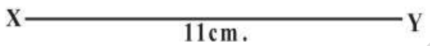
تجزیہ ΔABC کے احاطہ کی پیمائش کے مساوی ایک خطی قطعہ کھینچئے اور اسے XY کا نام دیجئے یعنی $AB+BC+CA$



$\angle B$ کے مساوی $\angle YXL$ اور $\angle C$ کے مساوی $\angle XYM$ زاویئے بنائیے اور ان کے زاوی ناصف کھینچئے۔

فرض کیجئے کہ زاوی ناصف نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

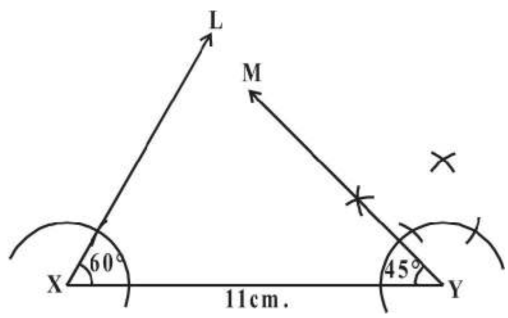
AX کا عمودی ناصف کھینچئے جو XY کو B پر قطع کرے اور AY کا عمودی ناصف کھینچئے جو AY کو نقطہ C پر قطع کرتا ہے تب AB اور AC کو ملانے سے ہمیں مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوتا ہے۔



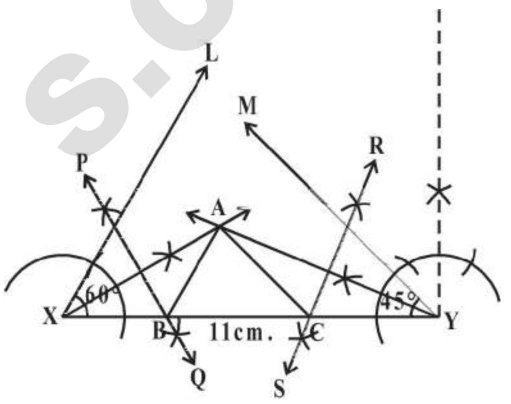
مرحلہ 2: ایک خطی قطعہ $XY=11cm$ کھینچئے

(جیسا کہ $XY=AB+BC+CA$)

مرحلہ 3: زاویئے $\angle YXL=60^0$ اور $\angle XYM=45^0$ بنائیے اور ان کے زاویۂ ناصف کھینچئے۔



مرحلہ 4: فرض کیجئے کہ ان زاویوں کے زاویۂ ناصف نقطہ A پر قطع کرتے ہیں AX اور AY کو ملائیے۔



مرحلہ 5: $\overline{AX}$ اور $\overline{AY}$ کے عمودی ناصف کھینچئے جو $\overleftrightarrow{XY}$ کو بالترتیب B اور C پر قطع کرتا ہے۔ B,A اور C,A کو ملائیے۔ تب ABC ہی مطلوبہ مثلث ہے۔

You can justify the construction as follows

Proof: B lies on the perpendicular bisector PQ of AX

$\therefore$ XB = AB and similarly CY = AC

This gives AB + BC + CA = XB + BC + CY

= XY

Again $\angle BAX = \angle AXB$ ($\because$ XB = AB in ΔAXB) and

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$

(Exterior angle of ΔABC).

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^{\circ}$.

Similarly $\angle ACB = \angle XYM = 45^{\circ}$ as required

$\therefore$ $\angle B = 60^{\circ}$ and $\angle C = 45^{\circ}$ as given are constructed.

TRY THESE

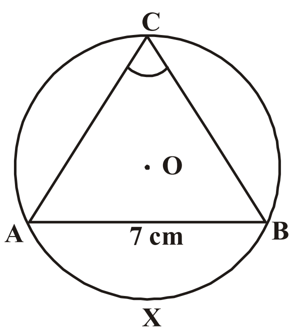
Can you draw the triangle with the same measurements in alternate way?

(**Hint**: Take $\angle YXL = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$ and $\angle XYM = \frac{45^{\circ}}{2} = 22\frac{1}{2}^{\circ}$)

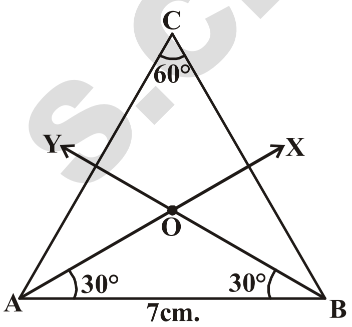
13.3.4 Construction : To construct a circle segment given a chord and a given an angle.

Example-8. Construct a segment of a circle on a chord of length 7cm. and containing an angle of 60°.

Solution : Steps of construction.



Step-1: Draw a rough sketch of a circle and a segment contains an angle 60°. (Draw major segment Why?) Can you draw a circle without a centre?



Analysis: Let 'O' be the centre of the circle. Let AB be the given chord and ACB be the required segment of the circle containing an angle C = 60°.

Let $\overset{\frown}{AXB}$ be the arc subtending the angle 60° at C.

Since $\angle ACB = 60^{\circ}$, $\angle AOB = 60^{\circ} \times 2 = 120^{\circ}$ (How?)

In ΔOAB, OA=OB (radii of same circle)

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180^{\circ} - 120^{\circ}}{2} = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$$

So we can draw ΔOAB and then draw a circle with radius equal to OA or OB.

آپ اس بناوٹ کی تصدیق حسب ذیل طریقہ سے کر سکتے ہیں۔

ثبوت: AX،B کا عمودی ناصف PQ پر واقع ہے۔

$AB = XB$ اور اسی طرح $CY = AC$

اس سے حاصل ہوتا ہے $AB+BC+CA=XB+BC+CY=XY$

مزید $\angle BAX = \angle AXB$ (ΔAXB میں $XB=AB$) اور

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$ (ΔABC کے خارجی زاویئے)

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^0$

اسی طرح $\angle ACB = \angle XYM = 45^0$ جو کہ مطلوب ہے

$\angle B = 60^0$ اور $\angle C = 45^0$ جیسا کہ دیا گیا ہے۔

کوشش کیجئے

کیا آپ انہی پیمائشات کے ساتھ کس بھی متبادل طریقہ سے یہہ مثلث بنا سکتے ہیں؟

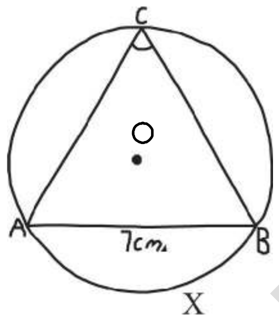
(اشارہ: $\angle YXL = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ لیجئے

اور $\angle XYM = \frac{45^\circ}{2} = 22\frac{1}{2}^\circ$)

13.3.4 بناوٹ: دائری قطعہ بنانا جب کہ ایک وتر اور ایک زاویہ دیا گیا ہو

مثال 8: 7 سمر والے وتر پر ایک دائری قطعہ بنایئے جس کا زاویہ 60^0 ہے۔

حل: بناوٹ کے مراحل



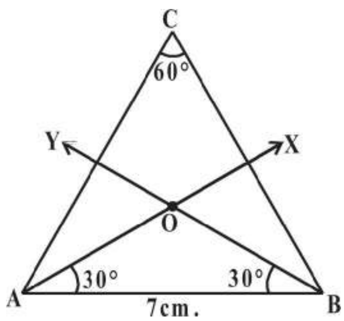
مرحلہ 1: دائری قطعہ کا جس کا زاویہ 60^0 ہے کا کچا خاکہ بنایئے (بڑا قطعہ بنایئے کیوں؟) کیا آپ بغیر مرکز کے دائرہ بنا سکتے ہیں۔؟

تجزیہ: فرض کرو کہ O دائرہ کا مرکز ہے۔فرض کرو کہ AB دیا گیا وتر اور ACB مطلوبہ دائروی قطعہ ہے جس ایک زاویہ $C = 60^0$ ہے۔

فرض کرو کہ $\widehat{AXB}$ ایک قوس ہے جو C پر 60^0 کا زاویہ بناتی ہے۔

چونکہ $\angle ACB = 60^0$، $\angle AOB = 60^0 \times 2 = 120^0$ (کیسے)

ΔOAB میں $OA=OB$ (اس دائرے کے قطر)



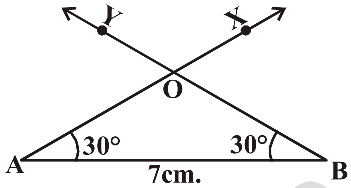
$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

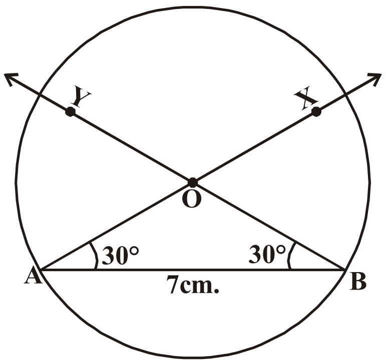
اس لئے ہم پہلے ΔOAB بنائیں گے اس کے بعد OA یا OB کے مساوی نصف قطر سے دائرہ بنا سکتے ہیں

Step-2 : Draw a line segment AB = 7cm.

Step-3 : Draw $\overrightarrow{AX}$ such that $\angle BAX = 30°$ and draw $\overrightarrow{BY}$ such that $\angle YBA = 30°$ to intersect $\overrightarrow{AX}$ at O .

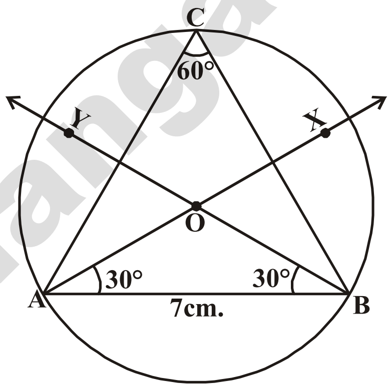
[Hint : Construct 30^o angle by bisecting 60^o angle]





Step-4 : With centre 'O' and radius OA or OB, draw the circle.

Step-5 : Mark a point 'C' on the arc of the circle. Join A, C and B, C. We get $\angle ACB = 60°$



Thus ACB is the required circle segment.

Let us justify the construction

Proof : OA = OB (radii of circle).

$\therefore \quad \angle OAB + \angle OBA = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \quad \angle AOB = 180° - 60° = 120°$

$\overset{\frown}{AXB}$ Subtends an angle of 120° at the centre of the circle.

$\therefore \quad \angle ACB = \dfrac{120°}{2} = 60°$

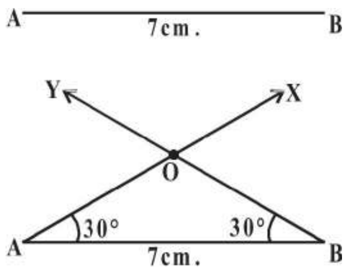
$\therefore$ ACB is the required segment of a circle.

Try This

What happens if the angle in the circle segment is right angle? What kind of segment do you obtain? Draw the figure and give reason.

Exercise - 13.2

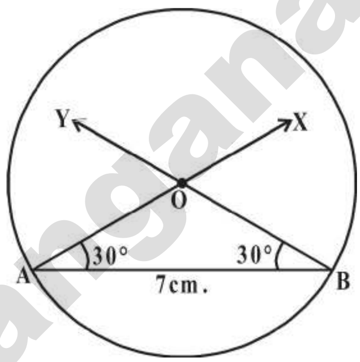
1. Construct ΔABC in which BC = 7 cm, $\angle B = 75^\circ$ and AB + AC = 12 cm.
2. Construct ΔPQR in which QR = 8 cm, $\angle Q = 60°$ and PQ – PR = 3.5 cm
3. Construct Δ XYZ in which $\angle Y = 30^\circ$, $\angle Z = 60^\circ$ and XY + YZ + ZX = 10 cm.



مرحلہ 2: ایک خطی قطعہ AB=7 cm کھینچیے

مرحلہ 3: $\overrightarrow{AX}$ اس طرح کھینچیے کہ $\angle BAX = 30^0$ اور $\overrightarrow{BY}$ اس طرح کھینچیے کہ $\angle YBA=30^0$ اور وہ $\overrightarrow{AX}$ کو O پر قطع کرے۔

(اشارہ: 60^0 کی تنصیف کرتے ہوئے 30^0 کا زاویہ بنائیے)

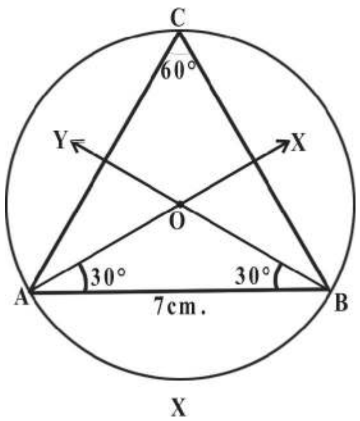


مرحلہ 4: مرکز O سے نصف قطر OA یا OB لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

مرحلہ 5: دائرہ کے قوس پر ایک نقطہ C کی نشاندہی کیجیے۔ AC اور BC کو ملائیے ہمیں $\angle ACB=60^0$ حاصل ہوتا ہے

پس ACB مطلوبہ دائری قطعہ ہے

آیئے اب ہم بناوٹ کی تصدیق کریں گے



ثبوت: OA=OB (دائرے کے نصف قطر)

$\therefore \quad \angle OAB + \angle OBA = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \quad \angle AOB = 180° - 60° = 120°$

$\widehat{AXB}$ دائرے کے مرکز پر کا 120^0 کا زاویہ بناتا ہے۔

$$\therefore \quad \angle ACB = \frac{120°}{2} = 60°$$

ACB مطلوبہ دائری قطعہ ہے۔

کوشش کیجیے

اگر دائری قطعہ میں زاویہ قائم الزاویہ ہو تو کیا ہوگا؟ آپ کو کس قسم کا قطعہ حاصل ہوگا؟ شکل بنائیے اور وجوہات بیان کیجیے۔

مشق 13.2

1. ΔABC بنائیے جس میں BC=7 سمر، $\angle B=75^0$ اور AB+AC=12 سمر
2. ΔPQR بنائیے جس میں QR=8 سمر، $\angle Q=60^0$ اور PQ-PR=3.5 سمر
3. ΔXYZ بنائیے جس میں $\angle Y=30^0$، $\angle Z=60^0$ اور XY+YZ+ZX=10 سمر

4. Construct a right triangle whose base is 7.5cm. and sum of its hypotenuse and other side is 15cm.

5. Construct a segment of a circle on a chord of length 5cm. containing the following angles.

   i. 90° ii. 45° iii. 120°

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. A geometrical construction is the process of drawing geometrical figures using only two instruments - an ungraduated ruler and a compass.

2. Construction of geometrical figures of the following with justifications (Logical proofs)
   - Perpendicular bisector of a given line segment.
   - bisector of a given angle.
   - Construction of 60° angle at the initial point of a given ray.

3. To construct a triangle, given its base, a base angle and the sum of other two sides.

4. To construct a triangle given its base, a base angle and the difference of the other two sides.

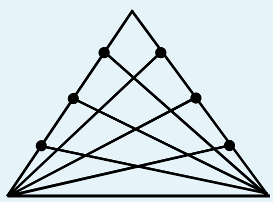
5. To construct a triangle, given its perimeter and its two base angle.

6. To construct a circle segment given a chord and a chord angle.

Brain Teaser

How many triangles are threre in the figure ?

(It is a 'Cevian' write formula of a triangle - named in honour of Mathematician Ceva)



(**Hint :** Let the number of lines drawn from each vertex to the opposite side be 'n')

.4 ایک قائم الزاویہ مثلث بنایئے جس کا قاعدہ 7.5 سمر، وتر اور دوسرے ضلع کا مجموعہ 15 سمر ہے۔

.5 5 سمر وتر پر ایک دائری قطعہ بنایئے جس کے زاویئے حسب ذیل ہیں۔

(i) 90^0 (ii) 45^0 (iii) 120^0

ہم نے کیا سیکھا؟

.1 جیومٹریہ بناوٹیں، جیومٹری اشکال بنانے کا وہ عمل ہے جسمیں صرف دو آلات غیر درجہ بند پٹری اور پرکار استعمال ہوتے ہیں۔

.2 حسب ذیل جیومٹری اشکال کی بناوٹیں تصدیق کے ساتھ (منطقی ثبوت)

☆ دیئے گئے خطی قطعہ کا عمودی ناصف

☆ دیئے گئے زاویہ کا زاوی ناصف

☆ دی گئی شعاع کے ابتدائی نقطہ سے 60^0 کا زاویہ بنانا

.3 مثلث بنانا جبکہ اس کا قاعدہ، قاعدہ پر کا زاویہ اور دوسرے دو ضلعوں کا فرق دیا گیا ہو۔

.4 مثلث بنانا جبکہ اس کا قاعدہ، قاعدہ پر کا زاویہ اور دوسرے دو ضلعوں کا فرق دیا گیا ہو۔

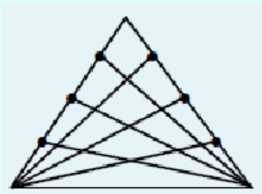
.5 مثلث بنانا جبکہ اس کا احاطہ اور قاعدے پر کے دو زاویئے دیئے گئے ہیں۔

.6 دائری قطعہ بنانا جبکہ ایک وتر اور ایک زاویہ دیا گیا ہے۔

دماغی ورزش

شکل میں کل کتنے مثلثات ہیں؟

سیون (Cevian) مثلث کا ضابطہ ہے جو ایک ریاضی داں سیوا کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔



اشارہ: فرض کرو کہ ہر راس سے مقابل کے ضلع پر کھینچے گئے خطوط کی تعداد n ہے۔

Chapter

14

Probability

I7Q3R2

Probability theory is nothing but common sense reduced to calculation.

- Pierre-Simon Laplace

14.1 INTRODUCTION

Siddu and Vivek are classmates. One day during their lunch they are talking to each other.

Observe their conversation

Siddu : Hello Vivek , What are you going to do in the evening today?

Vivek : Most likely, I will watch India v/s Australia cricket match.

Siddu : Whom do you think will win the toss ?

Vivek : Both teams have equal chance to win the toss. Do you watch the cricket match at home?

Siddu : There is no chance for me to watch the cricket at my home. Because my T.V. is under repair.

Vivek : Oh! then come to my home, we will watch the match together.

Siddu : I will come after doing my home work.

Vivek : Tomorrow is 2nd october. We have a holiday on the occasion of Gandhiji's birthday. So why don't you do your home work tomorrow?

Siddu : No, first I will finish the homework then I will come to your home.

Vivek : Ok.

Consider the following statements from the above conversation:

Most likely, I will watch India v/s Australia cricket match

There is ***no chance*** for me to watch the cricket match.

Both teams have ***equal chance*** to win the toss.

Here Vivek and Siddu are making judgements about the chances of the particular occurrence.

باب

14

قیاسیات

قیاسیات آدمی کی حسی صلاحیت کو حسابی عمل میں تبدیل کر دینے کا نام ہے۔

- پیری۔سمن لاپلیس

14.1 تعارف

شکیل اور اکرم ہم جماعت ہیں' ایک دن وہ دوپہر کے کھانے کے دوران گفتگو کر رہے ہیں۔ان کی گفتگو پر غور کیجیے۔

شکیل : السلام علیکم اکرم! آج شام آپ کی کیا مصروفیت ہے؟

اکرم : زیادہ ممکن ہے ہندوستان اور آسٹریلیا کے کرکٹ میچ کا مشاہدہ کروں گا۔

شکیل : آپ کے خیال میں ٹاس کون جیتے گا؟

اکرم : دونوں ٹیموں کے ٹاس جیتنے کا مساوی امکان ہے۔کیا تم کرکٹ میچ گھر پر ہی دیکھو گے؟

شکیل : مجھے گھر پر کرکٹ میچ کے مشاہدہ کا موقع نہیں۔کیونکہ میرا ٹیلی ویژن درستگی کے لیے دیا ہوا ہے۔

اکرم : تم میرے گھر چلے آؤ۔ہم ایک ساتھ میچ دیکھیں گے۔

شکیل : میں اپنا ہوم ورک کرنے کے بعد آؤں گا۔

اکرم : کل 2/اکٹوبر ہے اور ہمیں گاندھی جینتی کی تعطیل ہے' تم ہوم ورک کل کیوں نہیں کر لیتے؟

شکیل : نہیں' پہلے میں اپنا ہوم ورک کرلوں گا پھر تمہارے گھر آؤں گا۔

اکرم : ٹھیک ہے۔

مندرجہ بالا گفتگو سے اب ذیل کے بیانات پر غور کریں۔

زیادہ ممکن ہے میں ہندوستان اور آسٹریلیا کے کرکٹ میچ کا مشاہدہ کروں گا۔

مجھے گھر پر کرکٹ میچ کے مشاہدہ کا موقع نہیں۔

دونوں ٹیموں کے ٹاس جیتنے کا مساوی امکان ہے۔

مکالمے میں شکیل اور اکرم خاص مواقع سے متعلق امکانات پر غور کر رہے ہیں۔

In many situations we make such statements and use our past experience and logic to take decisions. For example. It is a bright and pleasant sunny day. I need not carry my umbrella and will take a chance to go.

However, the decisions may not always favour us. Consider the situation. “Mary took her umbrella to school regularly during the rainy season. She carried the umbrella to school for many days but it did not rain during her walk to the school. However, by chance, one day she forgot to take the umbrella and it rained heavily on that day”.

Usually the summer begins from the month of March, but one day in that month there was a heavy rainfall in the evening. Luckily Mary escaped becoming wet, because she carried umbrella on that day as she does daily.

Thus we take a decision by guessing the future happening that is whether an event occurs or not. In the above two cases, Mary guessed the occurrence and non-occurrence of the event of raining on that day. Our decision may favour us and sometimes may not. (Why?)

We try to measure numerically the chance of occurrence or non-occurrence of some events just as we measure many other things in our daily life. This kind of measurement helps us to take decision in a more systematic manner. Therefore we study probability to figure out the chance of something happening.

Before measuring numerically the chance of happening that we have discussed in the above situations, we grade it using the following terms given in the table. Let us observe the following table.

Term	Chance	Examples from conversation
certain	something that must occur	Gandhiji’s birthday is on 2nd October.
more likely	something that would occur with great chance	Vivek watching the cricket match
equally likely	somethings that have the same chance of occurring	Both teams winning the toss.
less likely	Something that would occur with less chance	Vivek doing homework on the day of cricket match.
impossible	Something that cannot happen.	Sidhu watching the circket match at his home.

کئی موقعوں پر ہم امکانات پر غور کرتے ہوئے منطقی طریقے پر فیصلہ کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر آج خوشگوار دن ہے۔ میں چھتری کے بغیر ہی باہر نکلوں گا، اس جملہ پر غور کیجیے۔

لیکن حالات ہمیشہ ہماری سوچ کے مطابق نہیں ہوتے۔

اس جملہ پر غور کیجیے ''مریم برسات کے موسم میں روزانہ اپنی چھتری اسکول لیجاتی ہے۔ وہ کئی روز تک ایسا ہی کرتی رہی مگر اس دوران کبھی بارش نہیں ہوئی۔ اتفاقاً ایک دن وہ اپنی چھتری ساتھ رکھنا بھول گئی اور اسی دن بہت تیز بارش ہوئی۔

عام طور پر گرمی کا موسم مارچ کے مہینہ سے شروع ہوتا ہے' لیکن اس مہینہ میں ایک شام بہت تیز بارش ہوئی۔ خوش قسمتی سے مریم اس دن بھی چھتری لے گئی تھی اس لیے وہ بھیگنے سے بچ گئی۔

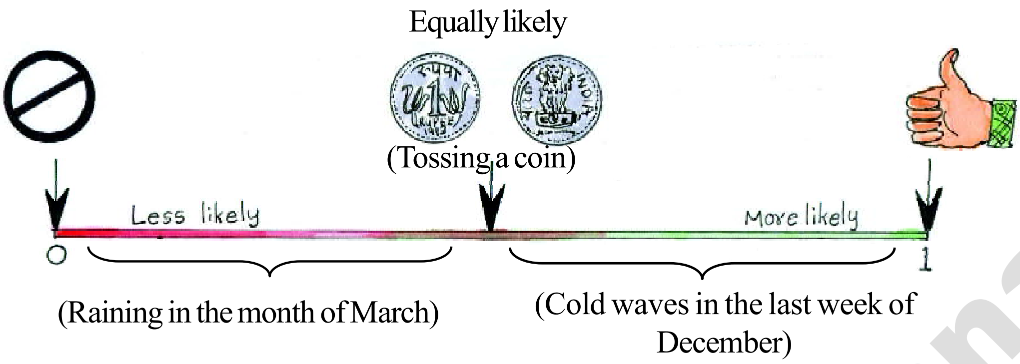
اس طرح ہم امکانی واقعات کا اندازہ لگا کر فیصلہ کر لیتے ہیں کہ ایسا ہوگا یا نہیں ہوگا۔ اوپر کی مثال میں بھی مریم نے اندازہ قائم کیا تھا' ہمارا اندازہ بعض دفعہ صحیح ہوسکتا ہے' اور بعض دفعہ صحیح نہیں ہوتا۔ (کیوں؟)

آیئے ہم بعض واقعات کے وقوع پذیر ہونے یا نہ ہونے سے متعلق حسابی طریقے سے جائزہ لیں گے' ایسا ہی جیسا کہ ہم روزمرہ زندگی میں دوسرے چیزوں کی پیائش کرتے ہیں۔ اس قسم کی پیائش ہم کو زیادہ منظّم انداز میں فیصلہ کرنے کا موقع فراہم کرتی ہے۔ لہٰذا ہم واقعات کے امکانات پر فیصلہ کرنے جیسے مواقع کے لیے قیاسیات کا مطالعہ کریں گے۔

سب سے پہلے ہم قیاسات سے متعلق بعض اصطلاحوں کی درجہ بندی کریں' انہیں ذیل کے جدول میں دیا گیا ہے۔

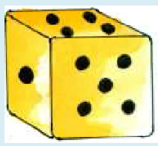
ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

مکالمہ سے ماخوذ مثالیں	قیاس (امکان)	اصطلاح
گاندھی جینتی 2/ اکٹوبر کو منائی جاتی ہے۔	جس کا وقوع پذیر ہونا یقینی ہو۔	**یقینی**
اکرم کرکٹ میچ کا مشاہدہ کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا زیادہ امکان ہو۔	**زیادہ امکان**
دونوں میں سے کوئی ٹیم ٹاس جیت سکتی ہیں۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا مساوی امکان ہو۔	**مساوی امکان**
اکرم کرکٹ میچ کے دن ہوم ورک کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کم ہو۔	**کم امکان**
شکیل گھر پر کرکٹ میچ کا مشاہدہ کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان نہ ہو۔	**ناممکن**

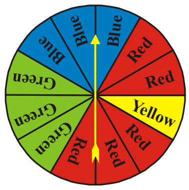


Do This

1. Observe the table given in the previous page and give some other example for each term.
2. Classify the following statements into the categories ***less likely, equally likely, more likely.***
   a) Rolling a dice* and getting a number 5 on the top face.
   b) Cold waves in your village in the month of November.
   c) India winning the next soccer(foot ball)world cup
   d) Getting a tail or head when a coin is tossed.
   e) Winning the jackpot for your lottery ticket.



14.2 Probability



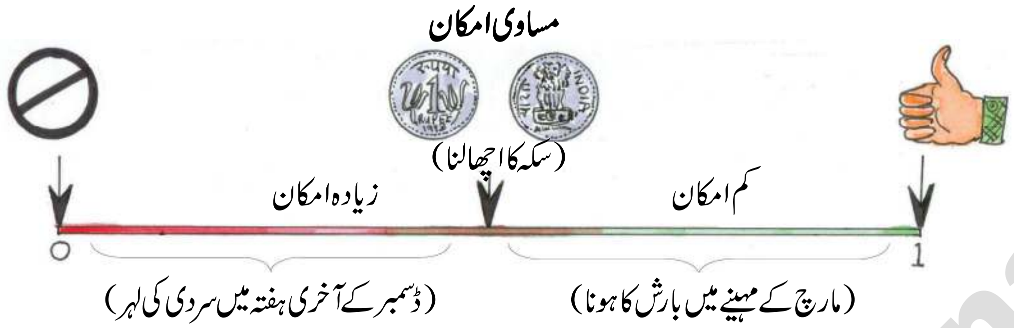
spinner

14.2.1 Random experiment and outcomes

To understand and measure the chance, we perform the experiments like tossing a coin, rolling a dice and spining the spinner etc.

When we toss a coin we have only two possible results, head or tail. Suppose you are the captain of a cricket team and your friend is the captain of the other cricket team. You toss the coin and ask your friend to choose head or tail. Can you control the result of the toss? Can you get a head or tail that you want? In an ordinary coin that is not possible. The chance of getting either is same and you cannot say what you would get. Such an experiment known as 'random experiment'. In such experiments though we know the possible outcomes before conducting the experiment, we cannot predict the exact outcome that occurs at a particular time, in advance. The outcomes of random experiments may be equally likely or may not be. In the coin tossing experiment head or tail are two possible outcomes.

* A dice is a well balanced cube with its six faces marked with numbers from 1 to 6, one number on each face. Sometimes dots appear in place of numbers.



یہ کیجیے

1. پچھلے صفحہ میں دیے گئے جدول کا مشاہدہ کیجیے اور ہر ایک اصطلاح کے لیے کوئی دوسری مثال دیجیے۔
2. ذیل کے بیانات کی اصطلاحات جیسے کم امکان، مساوی امکان، زیادہ امکان میں درجہ بندی کیجیے۔

(a) پانسہ اچھالنا، اور اوپری رخ پر عدد 5 کے وقوع کا قیاس۔
(b) نومبر کے مہینے میں آپ کے گاؤں میں سردی کی لہر کا چلنا۔
(c) ہندوستان اگلا فٹ بال ورلڈ کپ جیتے گا۔
(d) سکّہ اچھالنے پر چِت یا پٹ کا وقوع۔
(e) لاٹری ٹکٹ خرید کر جیک پاٹ جیتنے کا امکان۔

14.2 قیاسیات

14.2.1 بلا منصوبہ تجربہ اور اس سے حاصل ہونے والے نتائج

سکہ

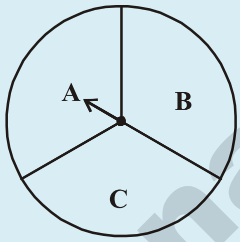
واقعات کے قیاس کے لیے ہم، ایک سکّہ کو اچھالنا، ایک پانسہ کو لڑھکانا اور چرخے کو گھمانا وغیرہ جیسے تجربات کرتے ہیں۔

جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے ہیں تو صرف دو امکانی نتائج ہوتے ہیں، چت Head (H) اور پٹ Tail (T)۔ فرض کیجیے کہ آپ ایک کرکٹ ٹیم کے کپتان ہیں اور آپ کا دوست دوسری کرکٹ ٹیم کا کپتان۔ آپ سکّہ اچھالیے اور اپنے دوست کو چت یا پٹ منتخب کرنے کے لیے کہیے۔ کیا نتیجہ آپ کی مرضی کے مطابق ہوگا؟ عام طور پر ایسا ضروری نہیں ہے۔ آپ یہ نہیں کہہ سکتے کہ آپ کی توقع کے مطابق نتیجہ ہوگا، اس طرح ایک سکّہ کو اچھالنے کا تجربہ 'بلا منصوبہ تجربہ' کہلاتا ہے۔ اس طرح کے تجربات میں ہم کو تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج پہلے سے معلوم ہوتے ہیں، لیکن کیا خاص موقع پر ''نتیجہ'' پہلے سے معلوم نہیں ہوتا۔ بلا منصوبہ تجربات کے نتائج کے امکانات تو مساوی ہوتے ہیں مگر خصوصی نتیجہ برآمد ہونا ضروری نہیں۔ سکّہ اچھالنے کے تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج چت (Head) اور پٹ (Tail) ہو سکتے ہیں۔

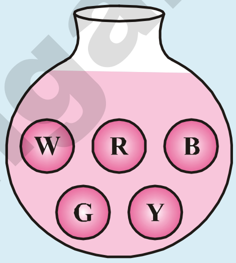
☆ پانسہ چھ رخوں والا ایک متوازن مکعب ہوتا ہے جس کے ہر رخ پر ایک عدد لکھا ہوتا ہے۔(1 سے 6 تک)بعض دفعہ اعداد کی جگہ نقاط کا بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

TRY THESE

1. If you try to start a scooter , What are the possible outcomes?
2. When you roll a dice, What are the six possible outcomes?
3. When you spin the wheel shown, What are the possible outcomes?
   (Out comes here means the possible sector where the pointer stops)



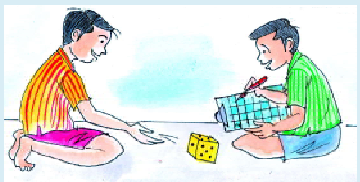
4. You have a jar with five identical balls of different colours (White, Red, Blue, Grey and Yellow) and you have to pickup (draw) a ball without looking at it. List the possible outcomes you get.



THINK, DISCUSS AND WRITE

In rolling a dice.

- Does the first player have a greater chance of getting a six on the top face?
- Would the player who played after him have a lesser chance of getting a six on the top face?
- Suppose the second player got a six on the top face. Does it mean that the third player would not have a chance of getting a six on the top face?

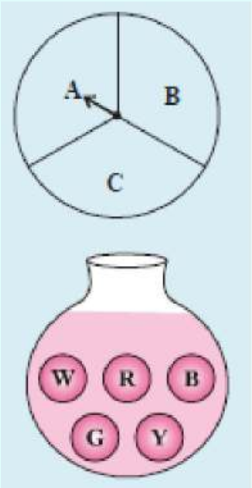


14.2.2 Equally likely outcomes

When we toss a coin or roll a dice , we assume that the coin and the dice are fair and unbiased (i.e. for each toss or roll the chance of all possibilities is equal). We conduct the experiment many times and collect the observations. Using the collected data, we find the measure of chance of occurrence of a particular happening.

A coin is tossed several times and the result is noted. Let us look at the result sheet where we keep on increasing the tosses.

کوشش کیجئے



.1 اگر آپ اسکوٹر اسٹارٹ کرنا چاہیں تو بتائیے کہ ممکنہ نتائج کیا ہوں گے؟

.2 اگر آپ ایک پانسہ کو اچھالتے ہوں تو چھ ممکنہ نتائج کیا ہوں گے؟

.3 جب آپ پہیہ کو زور سے گھماتے ہوں تو نتائج کیا ہوں گے؟
(یہاں نتائج ممکنہ وہ قطاع ہے جہاں پوائنٹر رکتا ہے)

.4 آپ کی بوتل میں مختلف رنگوں کی پانچ مشابہہ گیندیں ہیں۔(سفید' سرخ' نیلی' سرمئی اور زرد)
انہیں دیکھے بغیر آپ کو ان میں کوئی ایک گیند نکالنی ہے۔وقوع پذیر ہونے والے ممکنہ نتائج کی فہرست بنائیے۔

سوچیے' بحث کیجیے اور لکھیے

ایک پانسہ کو اچھالنے میں

- کیا پہلے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہونے کا زیادہ امکان ہے؟
- کیا اس کے بعد کھیلنے والے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہونے کا کم امکان ہے؟
- فرض کیجیے کہ دوسرے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہوتا ہے' کیا اس کا مطلب یہ ہے کہ تیسرے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' وقوع ہونے کی توقع نہیں ہے؟

14.2.2 مساوی ممکنہ / نتائج

جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے یا ایک پانسہ کو لڑھکانے کا بلامنصوبہ تجربہ کرتے ہیں تو جانتے ہیں کہ سکّہ اور پانسہ کا نتیجہ امکانی ہونے کی بناء پر کسی کے بھی حق میں ہوسکتا ہے' تمام رخوں سے کسی ایک رخ کے اوپر آنے کے امکانات یکساں ہیں۔ہم اس تجربہ کو کئی بار دہراتے ہوئے مشاہدات کو اکٹھا کریں گے' اور اکٹھا کیے ہوئے معطیات کے استعمال سے ''ایک خاص سعی'' کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس کریں گے۔

مثال کے طور پر ایک سکّہ کو اچھالنے کا عمل کئی بار کرتے ہوئے ہم چت (H) اور پٹ (T) کے متعدد بار وقوع پذیر ہونے کا مشاہدہ کریں گے۔اس مقصد کے لیے ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

Number of tosses	Tally marks (Heads)	Number of heads	Tally mark (Tails)	Number of tails
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

We can observe from the above table as you increase the number of tosses, the number of heads and the number of tails come closer to each other.

Do This

Toss a coin for number of times as shown in the table. And record your findings in the table.

No. of Tosses	Number of heads	No. of tails
10		
20		
30		
40		
50		

What happens if you keep on increasing the number of tosses.

This could also be done with a dice, roll it for large number of times and observe.

سکہ کے اچھالنے کی تعداد	گنتی کے نشان چت (Heads)	چت وقوع ہونے کی تعداد	گنتی کے نشان پٹ (Tails)	پٹ کے وقوع ہونے کی تعداد
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

اوپر کے جدول سے ہم یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ، جتنی مرتبہ سکّے کو اچھالا جائے گا اتنی ہی مرتبہ چت اور پٹ کے ظاہر ہونے کے امکانات زیادہ ہوں گے۔

یہ کیجیے

جدول میں بتلائی گئی تعداد کے مطابق ایک سکّہ کو اچھالیے اور جدول میں اپنی معلومات کا اندراج کیجیے۔

سکہ کو اچھالنے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	پٹ وقوع ہونے کی تعداد
10		
20		
30		
40		
50		

سکّہ کو اچھالنے کے عمل میں اضافہ کرنے پر آپ نتیجہ سے متعلق کیا قیاس کریں گے۔

یہ عمل ایک پانسہ کے ذریعہ بھی کیا جاسکتا ہے اس کو متعدد بار لڑھکایئے اور مشاہدہ کیجیے۔

No. of times Die rolled	Number of times each outcome occured (i.e. each number appearing on the top face)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

From the above table, it is evident that rolling a dice for a larger number of times, the each of six outcomes, becomes almost equal to each other.

From the above two experiments, we may say that the different outcomes of the experiment are equally likely. This means each of the outcome has equal chance of occurring.

14.2.3 Trials and Events

In the above experiments each toss of a coin or each roll of a dice is a **Trial** or **Random experiment**.

Consider a trial of rolling a dice,

How many possible outcomes are there to get a number 5 more than 5 on the top face?

It is only one (i.e. 5, 6)

How many possible outcomes are there to get an even number on the top face?

They are 3 outcomes (2, 4 and 6).

Thus each specific outcome or the collection of specific outcomes make an **Event**.

In the above trial getting a number more than 5 and getting an even number on the top face are two events. Note that event need not necessarily a single outcome. But, every outcome of a random experiment is an event.

پانسہ کولڑھکانے کے عمل کی تعداد	ہرنتیجہ کے وقت پانسہ کی تعداد (یعنی اوپری رُخ پرظاہر ہونے والا عدد)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

اوپر کے جدول سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ 'ایک پانسہ کولڑھکانے کا عمل'' جتنی زیادہ مرتبہ دہرایا جاتا ہے''۔ چھ ممکنہ نتائج میں سے ہرایک کے وقوع ہونے کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے۔

اوپر کے دوتجربات کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ تجربہ کے مختلف نتائج مساوی' ممکنہ'یا مساوی امکانی ہوتے ہیں۔

14.2.3 کوشش اور وقوع

اوپر کے تجربات میں سکّہ کا ایک مرتبہ اچھالنا یا پانسہ کا ایک مرتبہ لڑھکانا' تجربہ'یا' بلا منصوبہ تجربہ' ہوتا ہے۔

ایک پانسہ کو اچھالنے کے عمل پر غور کیجیے۔

اوپری رخ پر 5 یا 5 سے بڑا عدد وقوع ہونے کے کتنے ممکنہ نتائج ہوسکتے ہیں؟

دونتائج ہوں گے (یعنی 5,6)

پانسہ کے اوپری رخ پر جفت عدد وقوع پذیر ہونے کے کتنے امکانات ہوسکتے ہیں؟

تین نتائج ہوسکتے ہیں (2' 4 اور 6)

اس طرح ایک مخصوص نتیجہ یا مخصوص نتائج کا مجموعہ ایک وقوعہ کہلاتا ہے۔

اوپر کے تجربہ میں ایک عدد جو 5 یا 5 سے بڑا ہو اور ایک جفت عدد کا اوپری رخ پر ظاہر ہونا دو وقوعے ہوں گے۔ غور کیجیے کہ وقوعہ کا صرف ایک واحد نتیجہ ضروری نہیں' لیکن ایک بلا منصوبہ تجربہ کا ہر نتیجہ ایک وقوعہ ہوتا ہے۔

Here we understand the basic idea of the event, more could be learnt on event in higher classes.

14.2.4 Linking the chance to Probability

Consider the experiment of tossing a coin once. What are the outcomes? There are only two outcomes Head or Tail and both outcomes are equally likely.

What is the chance of getting a head?

It is one out of two possible outcomes i.e. $\frac{1}{2}$. In other words it is expressed as the probability of getting a head when a coin is tossed is $\frac{1}{2}$, which is represented by

$$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ or } 50\%$$

What is the probability of getting a tail?

Now take the example of rolling a dice. What are the possible outcomes in one roll? There are six equally likely outcomes 1,2,3,4,5,or 6.

What is the probability of getting an odd number on the top face?

1, 3 or 5 are the three favourable outcomes out of six total possible outcomes. It is $\frac{3}{6}$ or $\frac{1}{2}$

We can write the formula for Probability of an event 'A'

$$P(A) = \frac{\text{Number of favourable outcomes for event 'A'}}{\text{Number of total possible outcomes}}$$

Now let us see some examples :

Example 1: If two identical coins are tossed simultaneously. Find (a) the possible outcomes, (b) the number of total outcomes, (c) the probability of getting two heads, (d) probability of getting atleast one head, (e) probability of getting no heads and (f) probability of getting only one head.

Solution : (a) The possible outcomes are

Coin 1	Coin 2
Head	Head
Head	Tail
Tail	Head
Tail	Tail

یہاں ہم وقوعہ کا صرف بنیادی تصور سمجھیں گے، اور اگلی جماعتوں میں اس کے بارے میں مزید وضاحت ہوگی۔

14.2.4 وقوعوں کا قیاسات سے ربط

غور کیجیے کہ ہم صرف ایک دفعہ سکّہ کو اچھالتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں، اس تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔

چت (Head) یا پٹ (Tail) اور یہ دونوں نتائج بھی مساوی امکانات رکھتے ہیں۔

ایک چت کے وقوع ہونے کا کتنا موقع ہے؟

یہ دو ممکنہ نتائج میں سے ایک ہے جو کہ $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں، ایک سکّہ کو اچھالنے پر ایک چت (H) وقوع ہونے کا امکان $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

جس کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے۔

$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$ یا 50%

ایک پٹ (T) کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

اب ہم ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل کرتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں کہ اس میں کتنے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔ اس تجربہ میں 6 مساوی ممکنہ نتائج 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 ہو سکتے ہیں۔ ایک پانسہ کے اوپری رخ پر ایک طاق عدد کے وقوع ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

جملہ چھ ممکنہ نتائج میں سے تین موافق نتائج 1، 3 یا 5 ہو سکتے ہیں جو کہ $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$۔

ایک وقوعہ 'A' کے قیاس کے لیے ضابطہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$P(A) = \frac{\text{وقوعہ 'A' کے لیے موافق ممکنہ نتائج کا تعداد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کا تعداد}}$$

اب چند مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال (1) : اگر دو مشابہہ سکّوں کو ایک ساتھ اچھالا جاتا ہے تو معلوم کیجیے۔ (a) ممکنہ نتائج (b) جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد (c) دو چت وقوع ہونے کے قیاس (d) کم از کم ایک چت وقوع ہونے کا قیاس (e) ایک بھی چت وقوع نہ ہونے کا قیاس اور (f) صرف ایک چت وقوع ہونے کا قیاس۔

حل : (a) ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں

سکہ 1	سکہ 2
چت	چت
چت	پٹ
پٹ	چت
پٹ	پٹ

b) Number of total possible outcomes is 4

c) Probability of getting two heads

$$= \frac{\text{Number of favourable outcomes of getting two heads}}{\text{Number of total possible outcomes}} = \frac{1}{4}$$

d) Probability of getting atleast one head = $\frac{3}{4}$

[At least one head means getting a head one or more number of times]

e) Probability of getting no heads $= \frac{1}{4}$.

e) Probability of getting only one head = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Do This

1. If three coins are tossed simultaneously then write their outcomes.
   a) All possible outcomes
   b) Number of possible outcomes
   c) Find the probability of getting at least one head (getting one or more than one head)
   d) Find the Probability of getting at most two heads (getting Two or less than two heads)
   e) Find the Probability of getting no tails

Example 2 : (a) Write the probability of getting each number on the top face when a dice was rolled in the following table. (b) Find the sum of the probabilities of all outcomes.

Solution : (a) Out of six possibilities the number 4 occurs once hence probability is 1/6. Similarly we can fill the table for the remaining values.

Outcome	1	2	3	4	5	6
Probability (P)				1/6		

(b) اس طرح جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد 4 ہے۔

(c) دوچت وقوع ہونے کا امکان

$\frac{1}{4}$ = دوچت وقوع ہونے موافق ممکنہ نتائج کا تعدد

جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد

(d) کم از کم ایک چت وقوع ہونے کا امکان = $\frac{3}{4}$

(کم از کم ایک چت کے وقوع ہونے کا مطلب زیادہ سے زیادہ ایک چت کتنی مرتبہ وقوع پذیر ہوسکتا ہے)

(e) ایک بھی چت وقوع نہ ہونے کا امکان = $\frac{1}{4}$

(f) صرف ایک چت وقوع ہونے کا امکان = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

یہ کیجیے

1. اگر بیک وقت تین سکّوں کو اچھالا جاتا ہے تو

(a) تمام ممکنہ نتائج لکھیے۔

(b) ممکنہ نتائج کی تعداد۔

(c) کم از کم ایک چت وقوع ہونے کا قیاس کیجیے

(یعنی ایک چت زیادہ سے زیادہ کتنی بار وقوع پذیر ہوسکتا ہے)

(d) دوچت کے کم از کم دو دو بار وقوع پذیر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

(e) ایک بھی پٹ (T) وقوع پذیر نہ ہونے کا قیاس کیجیے۔

مثال (2) : (a) ذیل کے جدول میں ایک پانسہ کو لڑھکانے کے تجربہ میں اوپری رخ پر ہر ایک عدد کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس لکھیے۔

(b) تمام ممکنہ نتائج کے قیاس کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل : (a) تمام چھ ممکنہ نتائج میں سے عدد 4 صرف ایک بار وقوع پذیر ہوتا ہے۔ اس لیے اس کا امکان $\frac{1}{6}$ ہوگا۔ اسی طرح ہم باقی خانے پر کریں گے۔

نتیجہ	1	2	3	4	5	6
قیاس (P)				1/6		

(b) The sum of all probabilities

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

We can generalize that

Sum of the probabilities of all the outcomes of a random experiment is always 1

TRY THIS

Find the probability of each event when a dice is rolled once

Event outcome(s)	Favourable outcome	Number of favourable outcome(s)	Total possible outcomes	Number possible outcomes	Probability = $\frac{\text{Number of favourable outcomes}}{\text{Number of total possible outcomes}}$
Getting a number 5 on the top face	5	1	1, 2, 3, 4, 5 and 6	6	1/6
Getting a number greater than 3 on the top face					
Getting a prime number on the top face					
Getting a number less than 5 on the top face					
Getting a number that is a factor of 6 on the top face					
Getting a number greater than 7 on the top face					
Getting a number that is a Multiple of 3 on the top face					
Getting a number 6 or less than 6 on the top face					

(b) تمام قیاسات کا مجموعہ

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

"ایک بلا منصوبہ تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کے قیاسات کا مجموعہ ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔"

کوشش کیجیے

جب پانسہ کو ایک دفعہ لڑھکایا جاتا ہے تو ہر ایک وقوعہ کا امکان معلوم کیجیے۔

وقوعہ (Event)	موافق نتیجہ (S)	موافق نتیجہ کی تعداد (S)	جملہ ممکنہ نتائج	ممکنہ نتائج کی تعداد	قیاس = موافق نتائج کی تعداد / تمام جملہ نتائج کی تعداد
اوپری رخ پر عدد 5 کا وقوع پذیر ہونا	5	1	1، 2، 3، 4، 5 اور 6	6	1/6
اوپری رخ پر 3 سے بڑا عدد وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر جفت عدد کا وقوع ہونا					
اوپری رخ پر ایک عدد کا 5 سے کم بار وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر 6 کے اجزائے ضربی وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر 7 سے بڑا عدد وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر 3 کے ضعف وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر عدد 6 یا 6 سے کم اعداد وقوع ہونا					

You can observe that

The probability of an event always lies between 0 and 1 (0 and 1 inclusive)

$$0 \leq \text{probability of an event } \leq 1$$

a) The probability of an event which is certain = 1

b) The probability of an event which is impossible = 0

14.2.5 Conduct your own experiments

1. We would work here in groups of 3-4 students each. Each group would take a coin of the same denomination and of the same type. In each group one student of the group would toss the coin 20 times and record the data. The data of all the groups would be placed in the table below (Examples are shown in the table).

Group No.	No. of tosses	Cumulative tosses of groups	Number of heads	Cumulative No. of heads	$\frac{\text{Cumulative heads}}{\text{total times tossed}}$	$\frac{\text{Cumulative tails}}{\text{total times tossed}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20} = \frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40} = \frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

What happens to the value of the fractions in (6) and (7) when the total number of tosses of the coin increases? Could you see that the values are moving close to the probability of getting a head and tail respectively.

2. In this activity also we would work in groups of 3-4. One student from each group would roll a dice for 30 times. Other students would record the data in the following table. All the groups should have the same kind of dice so that all the throws will be treated as the throws of the same dice.

No. of times Dice rolled	Number of times the following outcomes turn up					
	1	2	3	4	5	6
30						

آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ

ایک وقوعہ کا قیاس ہمیشہ 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔(بشمول 0 اور ایک)

(a) $0 \leq$ ایک وقوعہ کا قیاس ≤ 1

(b) ناممکن وقوعہ کا قیاس $= 0$

14.2.5 تجربہ کیجیے

.1 ہم یہاں 3 تا 4 طلباء پر مشتمل ایک گروپ بنا کر تجربہ کریں گے، ہر گروپ ایک ہی پیمائش رکھنے والا اور ایک ہی قسم کا سکّہ استعمال کرے گا۔ ہر گروپ کا ایک طالب علم سکّہ کو 20 دفعہ اچھالتے ہوئے حاصل ہونے والے نتائج کا اندراج کرے گا۔ تمام گروپس معطیات کو نیچے کے جدول میں درج کریں گے۔ (جدول میں مثالیں بتلائی گئی ہیں)

گروپ نمبر	سکہ اچھالے جانے کی تعداد	گروپس کے سکہ اچھالنے کی مجموعی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی مجموعی تعداد	چت وقوع ہونے کی مجموعی تعداد / سکہ اچھالے جانے کی جملہ تعداد	پٹ وقوع ہونے کی مجموعی تعداد / سکہ اچھالے جانے کی جملہ تعداد
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20} = \frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40} = \frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

جب سکّہ کو اچھالنے کی جملہ تعداد بڑھائی جاتی ہے تو کالم (6) اور (7) میں حاصل کسور کی قدر میں کیا تبدیلی ہوگی؟ کیا آپ نے غور کیا ہے کہ یہ قدریں ایک مرتبہ سکہ اچھالنے پر ایک چت (H) اور ایک پٹ (T) کے وقوع پذیر ہونے کے قیاس کے قریب ترین ہوتے جارہے ہیں۔

.2 اس مشغلہ میں بھی 3 تا 4 طلباء کا ایک گروپ ہوگا، ہر گروپ کا ہر ایک طالب علم 30 دفعہ بلا منصوبہ پانسہ لڑھکانے کے عمل کا تجربہ کرے گا۔ دوسرے طلباء ذیل کے جدول میں مشاہدات کا اندراج کریں گے۔ تمام گروپس ایک ہی قسم کے پانسہ کا استعمال کریں گے تاکہ سب کے پانسہ پھینکنے کا عمل ایک جیسا ہو۔

پانسہ کو لڑھکانے کی تعداد	ذیل کے نتائج کی تعداد					
	1	2	3	4	5	6
30						

Complete the following table, using the data obtained from all the groups :

Group(s)	Number of times 1 turned up	Total number of times a dice is rolled	$\frac{\text{Number of times 1 turned up}}{\text{Total number of times a dice is rolled}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st} $1^{st}+2^{nd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

What do you observe as the number of rolls increases; the fractions in cloumn (4) move closer to $\frac{1}{6}$? We performed the above experiment for the outcome 1. Check the same for the outcome 2 and the outcome 5.

What can you conclude about the values you get in column (4) and compare these with the probabilities of getting 1, 2, and 5 on rolling a dice?

3. What would happen, if we toss two coins simultaneously? We could have either both coins showing head, both showing tail or one showing head and one showing tail. Would the possibility of occurrence of these three be the same? Think about this while you do this group activity.

Divide class into small groups of 4 each. Let each group take two coins. Note that all the coins used in the class should be of the same denomination and of the same type. Each group would throw the two coins simultaneously 20 times and record the observations in a table.

No. of times two coins tossed	No. of times no head turns up	Number of times one head turns up	Number of times two heads turns up
20			

All the groups should now make a cummulative table:

تمام گروپس کے محصلہ معطیات کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے۔

گروپ (S)	پانسہ لڑھکانے پر '1' آنے کی تعداد	ایک پانسہ لڑھکانے کی جملہ تعداد	پانسہ لڑھکانے پر '1' آنے کی تعداد / پانسہ لڑھکانے کی جملہ تعداد
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st}			
$1^{st}+2^{nd}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں جب پانسہ کو لڑھکانے کے عمل کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تو کالم (4) میں کسور $\frac{1}{6}$ سے قریب ہوتی جاتی ہیں۔نتیجہ 1 حاصل کرنے کے لیے ہم نے اوپر کا تجربہ کیا نتیجہ 2 اورنتیجہ 5 حاصل ہونے کے لیے بھی ایسی ہی جانچ کیجیے۔

کالم (4) میں حاصل ہونے والی کسری قدروں سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں اوران کے تقابل، ایک پانسہ کو لڑھکانے پر امکانات 1،2 اور 5 کے حاصل ہونے سے کیجیے۔

.3 آپ یکبارگی دوسکّے اچھالیں تو کیا ہوگا؟ دونوں سکّے چت ظاہر کرسکتے ہیں یا دونوں بھی پٹ یا ایک چت اورایک پٹ۔کیا ان تینوں کے وقوع پذیر ہونے کا امکان یکساں ہوگا؟ گروہی مشغلہ میں انہی پر غور کیجیے۔

جماعت کو 9 بچوں کے گروپ میں تقسیم کیجیے۔ہر گروپ کو دوسکّے رکھنا ہوگا۔یاد رکھیے کہ استعمال کئے جانے والے سکّے یکساں پیائش اور یکساں قسم کے ہوں۔

دو سکے ہم وقت اچھالنے کی تعداد	چت (H) وقوع نہ ہونے کی تعداد	ایک بار چت (H) وقوع ہونے کی تعداد	دو چت ایک ساتھ وقوع نہ ہونے کی تعداد
20			

ہر گروپ ایک ساتھ 20 دفعہ دوسکّے پھینکے گا اور جدول میں مشاہدات کو درج کرے گا۔

Group(s)	Number of times two coins are tossed	Number of times no head turns up	Number of times one head turns up	Number of times two heads turns up
1^{st}				
$1^{st} + 2^{nd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd} + 4^{th}$				
....				

Now we find the ratio of the number of times no head turns up to the total number of times two coins are tossed. Do the same for the remaining events.

Fill the following table:

Group(s)	$\frac{\text{No. of times no head}}{\text{Total tosses}}$	$\frac{\text{No. of times one head}}{\text{Total tosses}}$	$\frac{\text{No. of times two heads}}{\text{Total tosses}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
Group 1^{st}			
Group $1 + 2^{nd}$			
Group $1 + 2 + 3^{rd}$			
Group $1 + 2 + 3 + 4^{th}$			
....			

As the number of tosses increases, the values of the columns (2), (3) and (4) get closer to 0.25, 0.5 and 0.25 respectively.

Example-3: A spinner was spun 1000 times and the frequency of outcomes was recorded as in given table:

Out come	Red	Orange	Purple	Yellow	Green
Frequency	185	195	210	206	204

Find (a) How many possible outcomes can you see in the spinner? What are they? (b) Compute the probability of each colour. (c) Find the ratio of each colour to the total number of times that the spinner spun (use the table)

گروپ (S)	بیک وقت دو سکے اچھالے جانے کی تعداد	چت (H) وقوع نہ ہونے کی تعداد	ایک چت (H) وقوع ہونے کی تعداد	دو چت وقوع ہونے کی تعداد
1^{st}				
$1^{st} + 2^{nd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd} + 4^{th}$				
....				

اب ہم چت وقوع نہ ہونے کی تعداد اور دو سکّے بیک وقت اچھالنے کی جملہ تعداد میں نسبت معلوم کریں گے۔ کیا ایک چت اور دو چت وقوع پذیر ہونے کے لیے بھی یہی طریقہ ہوگا؟

ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے

گروپ	چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد	ایک چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد	دو چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**
Group 1^{st}			
Group $1 + 2^{nd}$			
Group $1 + 2 + 3^{rd}$			
Group $1 + 2 + 3 + 4^{th}$			
....			

سکّہ اچھالنے کی تعداد جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے، کالموں (2)، (3) اور (4) کی قدریں بتدریج 0.25، 0.5 اور 0.25 کے نزدیک ہوتی جائیں گی۔

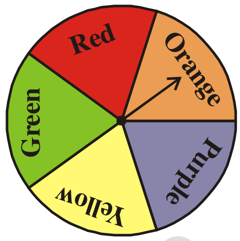
مثال (3) : ایک چرخہ کو 1000 بار گھمایا گیا ہے نتائج کی تعداد کو ذیل کے جدول میں درج کیا گیا

نتیجہ	لال	زعفرانی	کاسنی	پیلا	ہرا
تعدد	185	195	210	206	204

معلوم کیجیے (a) ممکنہ نتائج کی فہرست بنائیے جو آپ چرخی گھماتے وقت دیکھ سکتے ہیں۔ (b) ہر نتیجہ کے امکان کا تخمینہ کیجیے۔

(c) ہر نتیجہ اور چرخہ کے گھومنے کی تعداد میں نسبت معلوم کیجیے۔ (جدول دیکھیے)

Solution :



spinner

(a) The possible outcomes are 5. They are red, orange, purple, yellow and green. Here all the five colours occupy equal areas in the spinner. So, they are all equally likely.

(b) Let us compute the probability of each event.

$$P(\text{Red}) = \frac{\text{Favourable outcomes of red}}{\text{Total number of possible outcomes}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2.$$

Similarly

P(Orange), P(Purple), P(Yellow) and P(Green) is also $\frac{1}{5}$ or 0.2.

(c) From the experiment the frequency was recorded in the table

$$P(\text{Red}) = \text{Ratio for red} = \frac{\text{No. of outcomes of red in the above experiment}}{\text{Number of times the spinner was spun}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

Similarly, we can find the corresponding ratios for orange, purple, yellow and green are 0.195, 0.210, 0.206 and 0. 204 respectively.

Can you see that each of the ratio is approximately equal to the probability which we have obtained in (b) [i.e. before conducting the experiment]

Example-4. The following table gives the ages of audicence in a theatre. Each person was given a serial number and a person was selected randomly for the bumper prize by choosing a serial number. Find the probability of each event.

Age	Male	Female
Under 2	3	5
3 - 10 years	24	35
11 - 16 years	42	53
17 - 40 years	121	97
41- 60 years	51	43
Over 60	18	13

Total number of audience : 505

حل :

اسپنر

(a) ممکنہ نتائج 5 ہیں۔وہ یہ ہیں:لال، زعفرانی، کاسنی، پیلا اور ہرا۔
یہاں چرخی میں پانچ رنگوں کا گھرا ہوا رقبہ مساوی ہے۔یہ مساوی متوقع وقوعے ہیں۔

(b) ہر وقوعہ کے امکان کا تخمینہ کیجیے۔

$$P(\text{لال}) = \frac{\text{لال رنگ وقوع ہونے کے موافق نتائج}}{\text{ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2$$

اسی طرح

P (زعفرانی)، P (کاسنی)، P (پیلا)، P (ہرا) بھی $\frac{1}{5}$ یا 0.2 ہوں گے۔

(c) تجربہ سے جدول میں تعدد کا اندراج کیا گیا۔

$$P(\text{لال}) = \text{لال کے لیے نسبت} = \frac{\text{اوپر کے تجربہ میں لال رنگ وقوع ہونے کے نتائج کی تعداد}}{\text{چرخی کے گھومنے سے بننے والے وقوعوں کی تعداد}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

اسی طرح زعفرانی، کاسنی، پیلے اور ہرے کی متناظر نسبتیں بالترتیب 0.195، 0.210، 0.206 اور 0.204 ہوں گی۔

کیا ہم دیکھ سکتے ہیں کہ (b) میں ہر نسبت محصلہ امکانی قدر کے مساوی ہے۔(تجربہ سے پہلے)

مثال (4) : ایک سینما تھیٹر میں بیٹھے ہوئے شائقین کی عمریں ذیل کے جدول میں دی گئی ہیں۔ ہر شخص کو ایک سلسلہ نشان دیا گیا ہے، اور ایک سلسلہ نشان بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہوئے اس سلسلہ نشان والے شخص کو بمپر پرائز کے لیے منتخب کیا جاتا ہے۔اب آپ ہر وقوعہ کا قیاس کیجیے۔

عورتیں	مرد	عمر
5	3	2 سال تک
35	24	3 - 10 سال
53	42	11 - 16 سال
97	121	17 - 40 سال
43	51	41 - 60 سال
13	18	60 سال کے اوپر

شائقین کی جملہ تعداد = 505

a) The probability of audience of age less than or equal to 10 years

Solution : The audience of age less than or equal to 10 years = 24 + 35 + 5 + 3 = 67

Total number of people = 505

P(audicence of age $\leq$ 10 years) = $\frac{67}{505}$

b) The probability of female audience of age 16 years or younger

Solution : The female audience with age less than or equal 16 years = 53 + 35 + 5 = 93

P(female audicence of age $\leq$ 16 years) = 93/505

c) The probability of male audience of age 17 years or above

Solution : The male audience of age 17 years or above = 121 + 51 + 18 = 190

P(male audience of age $\geq$ 17 years) $= \frac{190}{505} = \frac{38}{101}$

d) The probability of audience of age above 40 years

Solution : The audience of age above 40 years = 51+43+18+ 13 = 125

P(audience of age > 40 years) $= \frac{125}{505} = \frac{25}{101}$

e) The probability of the person watching the movie is not a male

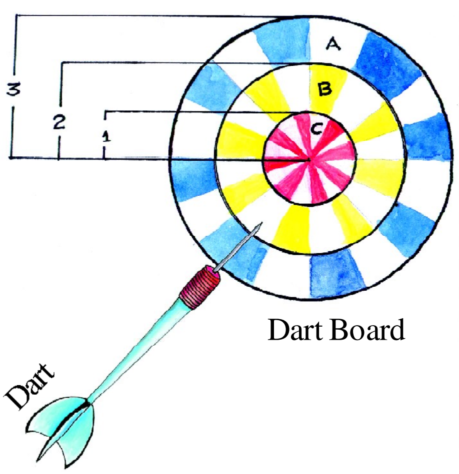
Solution : The number of persons watching the movie is not a male

= 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246

P(A person watching movie is not a male) $= \frac{246}{505}$

Example-5 : Assume that a dart will hit the dart board and each point on the dart board is equally likely to be hit in all the three concentric circles where radii of concetric circles are 3 cm, 2 cm and 1 cm as shown in the figure below.

Find the probability of a dart hitting the board in the region A. (The outer ring)



Dart Board

Solution : Here the event is hitting in region A.

The Total area of the circular region with radius 3 cm

$= \pi(3)^2$

(a) 10 سال یا اس سے کم عمر شائقین کا امکان

حل : $67 = 3 + 5 + 35 + 24 =$10 سال یا اس سے کم عمر کے شائقین

جملہ لوگوں کی تعداد $= 505$

$$P\,(\text{10 سال سے کم عمر شائقین}) = \frac{67}{505}$$

(b) 16 سال یا اس سے کم عمر کی لڑکیوں کا قیاس

حل : $93 = 5 + 35 + 53=$ 16 سال یا اس سے کم عمر کی لڑکیاں

$$P\,(\text{16 سال سے کم عمر لڑکیاں}) = \frac{93}{505}$$

(c) 17 سال یا اس سے زیادہ عمر کے نوجوانوں کا قیاس

حل : $190 = 18 + 51 + 121 =$ 17 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد

$$P\,(\text{17 سال سے زیادہ عمر کے افراد}) = \frac{190}{505} = \frac{38}{101}$$

(d) 40 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد کا قیاس

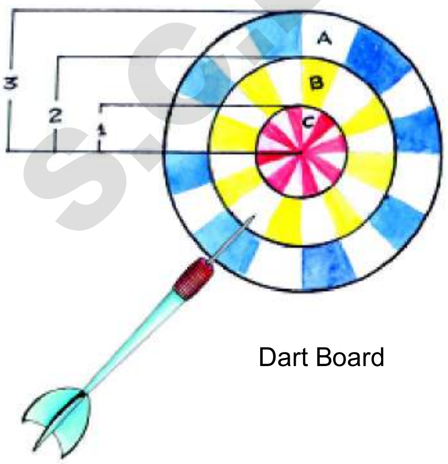
حل : $125 = 13 + 18 + 43 + 51 =$ 40 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد

$$P\,(\text{40 سال سے زیادہ عمر کے افراد}) = \frac{125}{505} = \frac{25}{101}$$

(e) خواتین کا قیاس

حل : $246 = 13 + 43 + 97 + 53 + 35 + 5 =$ خاتون شائقین

$$P\,(\text{خاتون شائقین}) = \frac{246}{505}$$



Dart Board

مثال (5) : فرض کیجیے کہ ایک تیر' ڈارٹ بورڈ سے ٹکراتا ہے' ڈارٹ بورڈ پر تین ہم مرکز دائرے ہیں ان کے نصف قطر 1 سمر 2 سمر اور 3 سمر ہیں۔

ہر نقطہ مساوی امکانات پر وقوع بناتا ہے' جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

بورڈ کے خطہ 'A' (بیرونی حلقہ) میں تیر کے ٹکرانے کا قیاس معلوم کیجیے۔

حل : یہاں وقوع خطہ A سے ٹکرانا ہے۔

3 ہم نصف قطر سے دائری خطہ کا جملہ رقبہ $= \Pi(3)^2$

Area of circular region A (i.e. ring A) = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

Probability of the dart hitting the board in region A is P(A)

$$P(A) = \frac{\text{Area of circular region A}}{\text{Total Area of the circular region}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi} = \frac{5}{9}$$

Remember

Area of a circle = πr^2

Area of a ring = $\pi R^2 - \pi r^2$

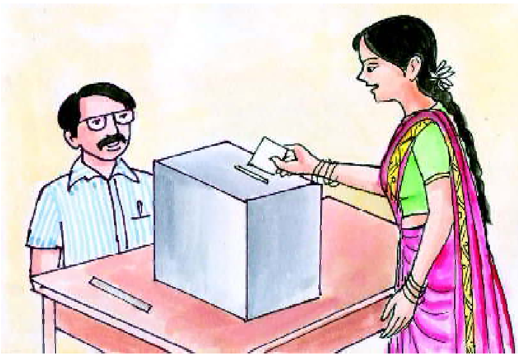
TRY THESE

From the figure given in example 5.

1. Find the probability of the dart hitting the board in the circular region B (i.e. ring B).
2. Without calculating, write the percentage of probability of the dart hitting the board in circular region C (i.e. ring C).

14.3 USES OF PROBABILITY IN REAL LIFE

- Meteorological department predicts the weather by observing trends from the data collected over many years in the past.
- Insurance companies calculate the probability of happening of an accident or casuality to determine insurance premiums.
- "An exit poll" is taken after the election . It is surveying the people to which party they have voted. This gives an idea of winning chances of each candidate and predictions are made accordingly.



$$\text{دائروی خطہ 'A' کارقبہ(حلقہ A)} = \Pi(3)^3 - \Pi(2)^2$$

ڈارٹ بورڈ پر تیر خطہ 'A' میں کے ٹکرانے کا قیاس

$$P(A) = \frac{\text{دائروی خطہ 'A' کارقبہ}}{\text{جملہ رقبہ}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi}$$

$$\frac{5}{9} = 0.556 = 55.6\%$$

یاد رہے کہ

دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

دائری حلقہ کا رقبہ $= \pi R^2 - \pi r^2$

کوشش کیجئے

مثال 5 میں دی گئی شکل سے

1. ڈارٹ بورڈ کے دائروی خطہ 'B' میں تیر (ڈارٹ) کے ٹکرانے کے وقوع کا قیاس کیجیے۔ (جو حلقہ 'B' ہے)
2. بغیر محسوب کیے کہ بورڈ کے دائروی خطہ 'C' میں تیر (ڈارٹ) کے ٹکرانے کے وقوع کا قیاس کیجیے اور اس کا فیصد بھی معلوم کیجیے۔ (جو حلقہ 'C' ہے)

14.3 عملی زندگی میں قیاس کا اطلاق

☆ محکمہ موسمات، قدیم ریکارڈ کی مدد سے موسم کی پیش قیاسی کرتا ہے۔

☆ بیمہ کمپنیاں حادثات کے امکانات کا اندازہ کر کے بیمہ کی اقساط کا تعین کرتی ہیں۔

☆ انتخاب کے بعد Exit poll (امکانی نتائج) کے سلسلہ میں رائے دہندوں سے پوچھا جاتا ہے کہ انہوں نے کس جماعت کے حق میں ووٹ دیا ہے۔ اس کے مطابق ہر امیدوار کے جیتنے کی پیش قیاسی کی جاتی ہے۔

EXERCISE - 14.1

1. A dice has six faces numbered from 1 to 6. It is rolled and the number on the top face is noted. When this is treated as a random trial.

   a) What are the possible outcomes ?

   b) Are they equally likely? Why?

   c) Find the probability of a composite number turning up on the top face.

2. A coin is tossed 100 times and the following outcomes are recorded

   Head:45 times Tails:55 times from the experiment

   a) Compute the probability of each outcomes.

   b) Find the sum of probabilities of all outcomes.

3. A spinner has four colours as shown in the figure. When we spin it once, find

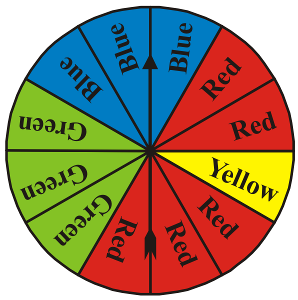
   a) At which colour, is the pointer more likely to stop?

   b) At which colour, is the pointer less likely to stop?

   c) At which colours, is the pointer equally likely to stop?

   d) What is the chance the pointer will stop on white?

   e) Is there any colour at which the pointer certainly stops?



4. A bag contains five green marbles, three blue marbles, two red marbles, and two yellow marbles. One marble is drawn out randomly.

   a) Are the four different colour outcomes equally likely? Explain.

   b) Find the probability of drawing each colour marble

   i.e. , P(green), P(blue), P(red) and P(yellow)

   c) Find the sum of their probabilities.

5. A letter is chosen from English alphabet. Find the probability of the letters being

   a) A vowel b) a letter that comes after P

   c) A vowel or a consonant d) Not a vowel

مشق 14.1

.1 پانسہ کے چھ رخ ہوتے ہیں اور ہر رخ پر 1 سے 6 تک اعداد لکھے ہوتے ہیں' پانسہ کو اچھالا جاتا ہے اور اوپری رخ پر وقوع ہونے والے عدد کو درج کر لیا جاتا ہے۔ اسے بلا منصوبہ تجربہ کہتے ہیں۔

(a) ممکنہ نتائج کیا ہیں؟

(b) کیا ان کے امکانات مساوی ہوتے ہیں؟

(c) اوپری رخ پر غیر مفرد عدد وقوع ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟

.2 ایک سکّہ کو 100 مرتبہ اچھالتے ہوئے اس سے حاصل ہونے والے نتائج کو اس طرح درج کیا گیا۔

چت (H) : 45 مرتبہ' پٹ (T) : 55 مرتبہ (تجربہ ہے)

(a) ہر نتیجہ کا قیاس محسوب کیجیے۔

(b) تمام نتائج کے قیاس کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

.3 ایک چرخی میں چار رنگ ہیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ جب ہم اسے ایک دفعہ گھماتے ہیں' تو معلوم کیجیے۔

(a) کانٹے کے کس رنگ پر وقوع ہونے کے امکانات زیادہ ہیں؟

(b) کانٹے کے کس رنگ پر وقوع ہونے کے کم امکان ہیں؟

(c) کانٹے کے کن رنگوں پر وقوع ہونے کے مساوی امکانات مساوی ہیں؟

(d) کانٹے کے سفید رنگ پر وقوع ہونے کے کیا امکانات ہیں؟

(e) کیا کوئی بھی ایسا رنگ ہے جس پر کانٹا یقینی طور پر وقوع ہو سکے گا؟

.4 ایک تھیلی میں پانچ ہری گولیاں' تین نیلی گولیاں' دو لال گولیاں اور دو پیلی گولیاں پائی جاتی ہیں۔ اس میں سے بلا منصوبہ ایک کے بعد دیگرے گولیاں نکالی جاتی ہیں۔

(a) کیا چار مختلف رنگوں کے وقوعوں سے مساوی نتائج کا حصول متوقع ہے؟

(b) بلا منصوبہ نکالی جانے والی گولی کا امکان معلوم کیجیے۔

جیسے P (پیلی) اور P (لال)' P (نیلی)' P (ہری)

(c) ان کے امکانات کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

.5 انگریزی حروف تہجی سے کوئی ایک حرف کو منتخب کیا گیا حروف ہونے کا امکان معلوم کیجیے۔

(a) ایک حرف علت   (b) حرف جو p کے بعد آتا ہے۔

(c) ایک حرف علت یا ایک حرف صحیح   (d) ایک حرف علت نہیں

6. Eleven bags of wheat flour, each marked 5 kg, actually contained the following weights of flour (in kg):

   4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

   Find the probability that any of these bags chosen at random contains more than 5 kg of flour.

7. An insurance company selected 2000 drivers at random (i.e., without any preference of one driver over another) in a particular city to find a relationship between age and accidents. The data obtained is given in the following table:

Age of Drivers (in years)	**Accidents in one year**				**More than 3 accidents**
	0	**1**	**2**	**3**	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
Over 50	360	45	35	15	9

   Find the probabilities of the following events for a driver chosen at random from the city:

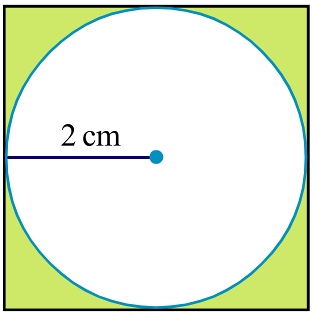
   (i) The driver being in the age group 18-29 years and having exactly 3 accidents in one year.

   (ii) The driver being in the age group of 30-50 years and having one or more accidents in a year.

   (iii) Having no accidents in the year.

8. What is the probability that a randomly thrown dart hits the square board in shaded region?

   (Take $\pi = \frac{22}{7}$ and express answer in percentage)



6. گیہوں کے آٹے کے گیارہ تھیلے ہیں جس پر 5 کلوگرام کا نشان لگایا گیا ہے' حقیقت میں یہ تھیلے ذیل میں دیے گئے اوزان پر مشتمل ہیں۔(کلوگرام میں)

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

بلا منصوبہ تجربہ سے تھیلوں کا انتخاب کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ 5 کلوگرام سے زائد وزن رکھنے والے تھیلوں کا امکان کیا ہوگا؟

7. ایک بیمہ کمپنی' عمر اور حادثات میں ہم رشتگی محسوب کرنے کے مقصد سے ایک شہر سے بلا منصوبہ 2000 ڈرائیورس کا انتخاب کرتی ہے۔ اس سلسلہ کے معطیات ذیل کے جدول میں درج کیے گئے ہیں۔

ڈرائیوروں کی عمر (سال میں)	ایک سال میں رونما ہونے والے حادثات				3 سے زیادہ حادثات
	0	1	2	3	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
Over 50	360	45	35	15	9

شہر میں بلا منصوبہ منتخب کرنے پر ایک ڈرائیور سے وقوع ہونے والے حادثات کا امکان معلوم کیجیے۔

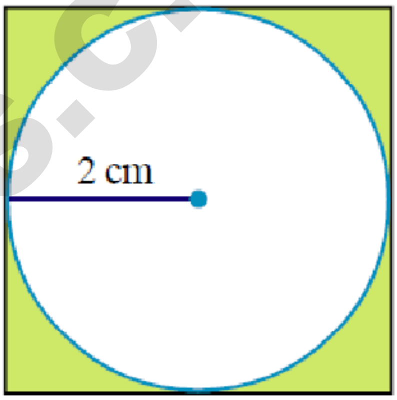
(i) 18 سے 29 سال عمر والے ڈرائیورس سے ایک سال میں 3 حادثات ہوتے ہیں۔

(ii) 30 سے 50 سال عمر رکھنے والے ڈرائیورس سے ایک سال میں ایک یا زائد حادثات ہوتے ہیں۔

(iii) سال میں کوئی حادثات نہیں ہوتے۔

8. بلا منصوبہ پھینکا گیا کانٹا جب مربع بورڈ کے سایہ دار خطہ سے ٹکرائے تو اس کا امکان کیا ہوگا؟

(اشارہ: $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے اور فیصد میں ظاہر کیجیے)



WHAT HAVE WE DISCUSSED?

E6Z3A9

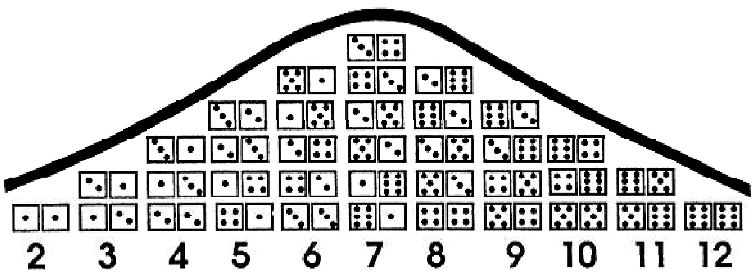
- There is use of words like most likely, no chance, equally likely in daily life, are showing the manner of chance and judgement.
- There are certain experiments whose outcomes have equal chance of occurring. Outcomes of such experiments are known as **equally likely** outcomes.
- An event is a collection of a specific outcome or some of the specific outcomes of the experiment.
- In some random experiments all outcomes have equal chance of occurring.
- As the number of trials increases, the probability of all equally likely outcomes come very close to each other.
- The probability of an event A

$$P(A) = \frac{\text{Number of favourable outcomes of event A}}{\text{Number of total possible outcomes}}$$

- The probability of an event which is certain = 1.
- The probability of an event which is impossible = 0
- The probability of an event always lies between 0 and 1 (0 and 1 inclusive).

Do you Know?

The diagram below shows the 36 possible outcomes when a pair of dice are thrown. It is interesting to notice how the frequency of the outcomes of different possible numbers (2 to 12).



This curve illustrate the Gaussian curve, name after 19th century famous mathematician Carl Friedrich Gauss.

ہم نے کیا سیکھا

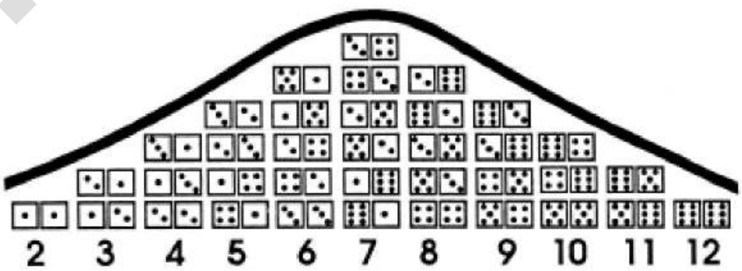
- روزمرہ زندگی میں ہم' زیادہ ممکن ہے' تو قع نہیں ہے' مساویانہ امکان جیسے الفاظ کا استعمال کرتے ہیں' جس سے فیصلہ کرنے کا اندازہ کیا جاتا ہے۔
- بعض ایسے حقیقی تجربات ہوتے ہیں جس کے نتائج کے وقوع پذیر ہونے کا یکساں/مساوی امکان ہوتا ہے ایسے تجربات سے اخذ کیے گئے نتائج ''مساوی متوقع'' یا' یکساں امکانی' کہلاتے ہیں۔
- تجربہ کے ذریعہ کسی نتیجہ یا نتائج کا اکٹھا کرنا ایک' وقوعہ' کہلاتا ہے۔
- چند بلا منصوبہ تجربات میں تمام نتائج کے وقوع پذیر ہونے کا مساوی امکان ہوتا ہے۔
- تجربہ میں جیسے جیسے وقوعوں کی تعداد بڑھتی جاتی ہے' تمام ''مساویانہ متوقع'' نتائج کا امکان قریب تر ہوتا جاتا ہے۔
- ایک وقوعہ 'A' کا امکان

$$P\ (A) = \frac{\text{ممکنہ موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

- ایک وقوعہ کا امکان جو حقیقی ہے = 1
- ایک وقوعہ کا امکان جو ناممکن ہے = 0
- ایک وقوعہ کا امکان ہمیشہ 0 اور 1 کے درمیان پایا جاتا ہے۔(جس میں 0 اور 1 دونوں شامل ہیں)

کیا آپ جانتے ہیں؟

نیچے کا خاکہ بتلاتا ہے کہ جب ایک پانسہ کی جوڑی پھینکی جاتی ہے تو 36 ممکنہ نتائج وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ ایک دلچسپ مشاہدہ ہے کہ(2 سے 12 تک)مختلف ممکنہ اعداد کے نتائج کا تعدد کس طرح ترتیب دیا جاتا ہے۔منحنی کو نیچے کی مثال کے ذریعہ سمجھئے۔



مندرجہ بالا منحنی خط کو گاشین منحنی کہتے ہیں جو کہ 19 ویں صدی کے مشہور ریاضی داں *Carl Friedrich Gauss* کی یادگار میں اس کے نام سے موسوم کیا گیا تھا۔

Chapter

15

Proofs in Mathematics

15.1 Introduction

We come across many statements in our daily life. We gauge the worth of each statement. Some statements we consider to be appropriate and true and some we dismiss. There are some we are not sure of. How do we make these judgements? In case there is a statement of conflict about loans or debts. You want to claim that bank owes your money then you need to present documents as evidence of the monetary transaction. Without that, people would not believe you. If we think carefully we can see that in our daily life we need to prove if a statement is true or false. In our conversations in daily life we sometimes do not consider to prove or check statements and accept them without serious examination. That however will not be accepted in mathematics. Consider the following:

1. The sun rises in the east.
2. $3 + 2 = 5$
3. New York is the capital of USA.
4. $4 > 8$
5. How many siblings do you have?
6. Goa has better football team than Bengal.
7. Rectangle has 4 lines of symmetry.
8. $x + 2 = 7$
9. Please come in.
10. The probability of getting two consecutive 6's on throws of a 6 sided dice.
11. How are you?
12. The sun is not stationary but moving at high speed all the time.
13. $x < y$
14. Where do you live?

In the above sentences you find some sentences are false. For example, 4>8, and New York is not the capital of USA. You find some sentences are correct.

These include "sun rises in the east." The probability of getting two consecutive 6's, the Sun is not stationary etc.

Besides those there are some other sentences that are true for some cases but not true for other cases, for example $x + 2 = 7$ is true only when $x = 5$ and $x < y$ is only true for those values of x and y where x is less than y.

باب
15
علم ریاضی میں ثبوت

15.1 تعارف

روزمرہ زندگی میں ہمیں کئی بیانات سے سابقہ پڑتا ہے، ہم بیان کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں۔ کچھ بیانات کو ہم موزوں اور صحیح سمجھتے ہیں، جب کہ کچھ اور کو رد کر دیتے ہیں، اور بعض بیانات ایسے بھی ہوتے ہیں جن کے بارے میں یقین سے کچھ نہیں کہا جاسکتا۔ پھر ہم یہ فیصلہ کس طرح کرتے ہیں؟ فرض کیجیے کہ قرض اور بقایا جات سے متعلق ایک متضاد بیان ہے۔ اگر آپ یہ دعویٰ کرتے ہیں کہ بینک آپ کی رقم دینی باقی ہے تب آپ کو بطور ثبوت رقمی دستاویزات پیش کرنے ہوں گے۔ ورنہ لوگ آپ پر یقین نہیں کریں گے۔ اگر ہم غور کریں تو معلوم ہوگا کہ ہماری روزمرہ زندگی میں بھی ہمیں یہ ثابت کرنا پڑتا ہے کہ کوئی بیان صادق ہے یا کاذب؟

بعض دفعہ ہم جملوں کے صداقت کی جانچ کو ضروری نہیں سمجھتے اور بغیر جانچ کے ہی قبول کر لیتے ہیں۔ ریاضی میں ایسا نہیں کیا جاسکتا۔ ذیل پر غور کیجیے:

1. سورج مشرق سے طلوع ہوتا ہے۔
2. $3 + 2 = 5$
3. امریکہ کا صدر مقام نیویارک ہے۔
4. $4 > 8$
5. آپ کتنے بھائی، بہن ہیں؟
6. گوا کی فٹبال ٹیم بنگال کی ٹیم سے بہتر ہے۔
7. مستطیل میں چار متشاکل خطوط ہوتے ہیں۔
8. $x + 2 = 7$
9. اندر آئیے۔
10. ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکنے پر دو مسلسل 6 آنے کا امکان کیا ہوگا؟
11. آپ کیسے ہیں؟
12. سورج ساکت نہیں بلکہ ہمیشہ تیز رفتاری سے حرکت کرتا ہے۔
13. $x < y$
14. آپ کہاں رہتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں ان میں سے چند جملے کاذب ہیں، مثال کے طور پر $4 > 8$۔ اس طرح ہم جانتے ہیں کہ امریکہ کا صدر مقام نیویارک نہیں ہے۔ ہماری موجودہ معلومات سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ چند صحیح ہیں۔

ان میں ''سورج مشرق سے طلوع ہوتا ہے'' اور ''ایک پانسہ کو اچھالنے پر مسلسل دو مرتبہ 6 آنے کا قیاس'' ''سورج ساکت نہیں'' وغیرہ شامل ہیں۔

ان کے علاوہ چند دوسرے جملے ایسے ہوتے ہیں جو چند معلوم قدروں کے لیے صادق ہوتے ہیں، اور دوسری قدروں کے لیے صادق نہیں ہوتے۔ مثلاً $x + 2 = 7$ صرف $x = 5$ کے لیے صادق ہے، اور $x < y$ ان ہی قدروں کے لیے صادق ہوگا جب کہ x، y سے چھوٹا ہو۔

Look at the other sentences which of them are clearly false or clearly true. Such type of sentences are called statements. We say these statements that can be judged on some criteria, no matter by what process for their being true or false.

Think about these:

1. Please ignore this notice.....
2. The statement I am making is false.
3. This sentence has some words.
4. You may find water on the moon.

Can you say whether these sentences are true or false? Is there any way to check them being true or false?

Look at the first sentence, if you ignore the notice, you do that because it tells you to do so. If you do not ignore the notice, then you have paid some attention to it. So you can never follow it and being an instruction it cannot be judged on a true/false scale. 2^{nd} and 3^{rd} sentences are talking about themselves. 4th sentence have words that show only likely or possibility and hence ambiguity of being on both sides.

The sentences which are talking about themselves and the sentences with possibility are not statements.

Do This

Make 5 more sentences and check whether they are statements or not. Give reasons.

15.2 Mathematical Statements

We can write infinately large number of sentences. You can think the kind of sentences you use and can you count the number of sentences you speak? Not all these however, they can be judged on the criteria of false and true. For example, consider, please come in. Where do you live? Such sentences can also be very large in number.

All these the sentences are not statements. Only those that can be judged either true or false but not both are statements. The same is true for mathematical statements. A mathemtical statement can not be ambiguous. In mathematics a statement is only acceptable if it is either true or false. Consider the following sentences:

1. 3 is a prime number.
2. Product of two odd integers is even.
3. For any real number x; $4x + x = 5x$
4. The earth has one moon.
5. Ramu is a good driver.
6. Bhaskara has written a book "Leelavathi".
7. All even numbers are composite.
8. A rhombus is a square.
9. $x > 7$.
10. 4 and 5 are relative primes.

دیگر جملوں پر بھی غور کیجیے جو یا تو واضح طور پر کاذب یا پھر صادق ہوتے ہیں۔ اس طرح کے جملے بیانات کہلاتے ہیں۔ یہ نہیں دیکھا جاتا ہے کہ بیانات صحیح کیوں ہیں یا غلط کیوں؟

ان جملوں پر غور کیجیے

1. آپ اس نوٹس کو نظر انداز کیجیے..........
2. میں جو بیان دے رہا ہوں وہ کاذب ہے۔
3. اس جملہ میں چند الفاظ ہیں۔
4. چاند پر پانی ہوسکتا ہے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ بیانات صادق ہیں یا کاذب؟ کیا ان کے صحیح یا غلط ہونے کی جانچ کا کوئی طریقہ ہے؟

پہلے جملے پر غور کیجیے' کیا آپ اس نوٹس کو نظر انداز کرتے ہیں؟ آپ ایسا ہی کریں گے کیونکہ آپ کو ایسا ہی کرنے کے لیے کہا گیا ہے۔ اگر آپ نوٹس کو نظر انداز نہیں کرتے ہیں تو آپ کو اس پر توجہ دینی ہوگی۔ لہٰذا آپ اس نوٹس پر عمل نہیں کریں گے اس لیے اس کے صحیح یا غلط ہونے کے پیمانہ کو جانچا نہیں جا سکتا ہے۔ دوسرے اور تیسرے جملے خود سے متعلق ہیں اور چوتھے جملے میں صرف امکان ظاہر ہو رہا ہے اور اس کا صحیح یا غلط ہونا مشکوک ہے۔

ایسے جملے جو خود سے متعلق ہوں' ایسے جملے جن سے امکانات ظاہر ہوں' بیانات نہیں کہلاتے۔

یہ کیجیے

مزید 5 جملے بنائیے اور جانچ کیجیے کہ وہ بیانات ہیں یا نہیں۔ وجوہات بتلائیے۔

15.2 ریاضیاتی بیانات

ہم لا تعداد جملے لکھ سکتے ہیں' آپ غور کیجیے کہ آپ کو کس قسم کے جملے استعمال کرنا ہے۔ کیا آپ ان کی تعداد کی گنتی کر سکتے ہیں؟ ان تمام کا شمار نہیں کیا جا سکتا' لیکن ان کو معیار کے تحت جانچا جا سکتا ہے کہ یہ صادق ہیں یا کاذب؟ مثال کے طور پر غور کیجیے ''اندر آیئے''، ''آپ کہاں رہتے ہیں''، ایسے جملے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔

ایسے تمام جملے' بیانات نہیں کہلاتے' صرف وہی جملے بیانات کہلاتے ہیں جن کا صادق ہونا یا کاذب ہونا جانچا جا سکتا ہو۔ ایک بیان بیک وقت صادق اور کاذب نہیں ہوسکتا۔ ریاضیاتی بیانات کے لیے بھی یہی اصول ہوتا ہے کہ ایک ریاضیاتی بیان غیر واضح نہیں ہوسکتا۔ ریاضی میں ایک بیان اس وقت قابل قبول ہوگا جب یا تو وہ صادق ہو یا پھر کاذب' لیکن دونوں نہیں۔ ذیل کے جملوں پر غور کیجیے۔

1. 3 ایک مفرد عدد ہے۔
2. دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔
3. کوئی حقیقی عدد x کے لیے $4x + x = 5x$
4. زمین کا ایک چاند ہے۔
5. رامو ایک اچھا ڈرائیور ہے۔
6. بھاسکرا نے ایک کتاب ''لیلاوتی'' لکھی۔
7. تمام جفت اعداد غیر مفرد ہوتے ہیں۔
8. معین ایک مربع ہوتا ہے۔
9. $x > 7$
10. 4 اور 5 اضافی مفرد اعداد ہیں۔

11. Silver fish is made of silver.
12. Humans are meant to rule the earth.
13. For any real number x, $2x > x$.
14. Havana is the capital of Cuba.

Which of these are mathematical and which are not mathematical statements?

15.3 Verifying the Statements

Let us consider some of the above sentences and discuss them as follows:

Example-1. We can show that (1) is true from the definition of a prime number.

Which of the sentences from the above list are of this kind of statements that we can prove mathematically? (Try to prove).

Example-2. "Product of two odd integers is even". Consider 3 and 5 as the odd integers. Their product is 15, which is not even.

Thus it is a statement which is false. So with one example we have showed this. Here we are able to verify the statement using an example that runs counter to the statement. Such an example, that counters a statement is called a counter example.

Try This

Which of the above statements can be tested by giving a counter example ?

Example-3. Among the sentences there are some like **"Humans are meant to rule the earth"** or **"Ramu is a good driver**."

These sentences are ambiguous sentences as the meaning of ruling the earth is not specific. Similarly, the definition of a good driver is not specified.

We therefore recognize that a 'mathematical statement' must comprise of terms that are understood in the same way by everyone.

Example-4. Consider some of the other sentences like
The earth has one Moon.
Bhaskara has written the book "Leelavathi"
Think about how would you verify these to consider as statements?

These are not ambiguous statements but needs to be tested. They require some observations or evidences. Besides, checking this statement cannot be based on using previously known results. The first sentence require observations of the solar system and more closely of the earth. The second sentence require other documents, references or some other records.

Mathematical statements are of a distinct nature from these. They cannot be proved or justified by getting evidence while as we have seen, they can be disproved by finding an example counter to the statement.

11. سلوفش چاندی سے بنی ہوتی ہے۔

12. انسان' زمین پرحکمرانی کے لیے بنایا گیا ہے۔

13. کسی حقیقی عدد x کے لیے $2x > x$

14. کیوبا کا صدر مقام ہوانا ہے۔

ان میں کونسے ریاضیاتی جملے ہیں اور کونسے غیر ریاضیاتی جملے۔

15.3 بیانات کی جانچ

اب ہم اوپر دیے گئے چند جملوں پر غور کرتے ہوئے ان پر بحث کریں گے۔

مثال (1) : ہم بتلا سکتے ہیں کہ ان میں پہلا جملہ مفرد عدد کی تعریف کے لحاظ سے صادق ہے۔

اوپر دیے گئے جملوں میں اس قسم کے بیانات کون سے ہیں جن کو ہم حسابی طور پر ثابت کر سکتے ہیں؟ (ثابت کرنے کی کوشش کیجیے)

مثال (2) : ''دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے''۔

طاق اعداد 3 اور 5 پر غور کیجیے ان کا حاصل ضرب 15 ہوتا ہے جو کہ جفت نہیں ہے۔

لہٰذا یہ ایک کاذب بیان ہے۔ ہم اس کو مثال کے ذریعہ بتلا چکے۔ ہم یہاں پر اس بیان کو جانچنے کے لیے اس کے مخالف بیان کی مدد لیں گے۔ ایسی مثال جس میں دیے گئے بیان کی مخالفت ہوتی ہو وہ اس بیان کی مخالف مثال کہلاتی ہے۔

کوشش کیجیے

اوپر کے کون سے بیانات کو ایک مخالف مثال دیتے ہوئے جانچا جا سکتا ہے؟

مثال (3) : جملے جیسے ''انسان زمین پر حکمرانی کے لیے بنایا گیا ہے'' یا ''راموا یک اچھا ڈرائیور ہے''۔ غیر واضح جملے ہیں کیونکہ زمین پر حکمرانی کرنا غیر واضح ہے۔ اسی طرح ایک اچھا ڈرائیور بھی غیر واضح ہے۔ لہٰذا ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایسا بیان جس کو سب ایک ہی طریقہ سے سمجھ سکیں۔ حسابی بیان ہوتا ہے۔

مثال (4) : دوسرے جملوں پر غور کیجیے جیسے:

زمین کا ایک چاند، بھاسکرا نے کتاب ''لیلاوتی'' لکھی۔

ان جملوں کے بیانات ہونے کی جانچ آپ کیسے کریں گے؟

یہ بیانات غیر واضح تو نہیں ہیں' لیکن ان کو جانچنے کی ضرورت ہے' اس کے لیے کچھ وضاحت درکار ہے۔ علاوہ ازیں پچھلے نتائج کی بنیاد پر ان بیانات کی جانچ نہیں کی جا سکتی ہے۔ پہلے جملے کو جانچنے کے لیے شمسی نظام بالخصوص زمین سے متعلق معلومات ضروری ہیں۔ جب کہ دوسرے جملے کی ضرورت ہوتی ہے۔

حسابی بیانات امتیازی خصوصیات رکھتے ہیں۔ کسی ثبوت کے ذریعہ انہیں ثابت کرنا مشکل ہے لیکن کسی مخالف بیان کے ذریعہ انہیں غلط ضرور ثابت کیا جا سکتا ہے۔

In the statement for any real number $2x > x$, we can take $x = -1$ or $-\frac{1}{2}$ .... and disprove the statement by giving counter example. You might have also noticed that $2x > x$ is true with a condition on x i.e. x belong to set N.

Example-5. Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements.

i. For every real number x, $3x > x$.

ii. For every real number x, $x^2 \geq x$.

iii. If you divide a number by two, you will always get half of that number.

iv. The angle subtended by a chord of a circle at a point on the circle is 90°.

v. If a quadrilateral has all its sides equal, then it is a square.

Solution :

i. If $x > 0$, then $3x > x$.

ii. If $x \leq 0$ or $x \geq 1$, then $x^2 \geq x$.

iii. If you divide a number other than 0 by 2, then you will always get half of that number.

iv. The angle subtended by a diameter of a circle at a point on the circle is 90°.

v. If a quadrilateral has all its sides and interior angles equal, then it is a square.

Exercise - 15.1

1. State whether the following sentences are always true, always false or ambiguous. Justify your answer.

 i. There are 27 days in a month.
 ii. Makarasankranthi falls on Friday.
 iii. The temperature in Hyderabad is 2°C.
 iv. The earth is the only planet where life exist.
 v. Dogs can fly.
 vi. February has only 28 days.

2. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers.

 i. The sum of the interior angles of a quadrilateral is 350°.
 ii. For any real number x, $x^2 \geq 0$.
 iii. A rhombus is a parallelogram.
 iv. The sum of two even numbers is even.
 v. Square numbers can be written as the sum of two odd numbers.

3. Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements.

 i. All numbers can be represented as the product of prime factors.
 ii. Two times a real number is always even.
 iii. For any x, $3x + 1 > 4$.
 iv. For any x, $x^3 \geq 0$.
 v. In every triangle, a median is also an angle bisector.

4. Disprove, by finding a suitable counter example, the statement $x^2 > y^2$ for all $x > y$.

کسی حقیقی عدد x $2x > x$ کے لیے بیان میں $x = -1$ یا $\frac{1}{2}$ لے سکتے ہیں اور مخالف مثال دیتے ہوئے اس بیان کو غلط ثابت کر سکتے ہیں۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ $2x > x$ ''x طبعی اعداد کے سٹ N سے تعلق رکھتا ہے'' کی شرط کے ساتھ صحیح ہے۔

مثال (5) : موزوں شرائط کے ساتھ ذیل کے بیانات کو دوبارہ لکھیئے تا کہ وہ صادق بیانات بن جائیں۔

(i) ہر حقیقی عدد x کے لیے $3x > x$

(ii) ہر حقیقی عدد x کے لیے $x^2 \geq x$

(iii) اگر آپ ایک عدد کو دو سے تقسیم کریں تو آپ کو ہمیشہ اس کا نصف حاصل ہوگا۔

(iv) دائرے کے کسی بھی نقطہ سے وتر بنانے پر وتر اور دائرہ کے درمیان بننے والا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔

(v) اگر ایک چار ضلعی کے تمام ضلعے مساوی ہیں تب یہ ایک مربع ہے۔

حل : (i) اگر $x > 0$، تب $3x > x$

(ii) اگر $x < 0$ یا $x > 1$، تب $x^2 > x$

(iii) اگر آپ 0 کے سوا ایک عدد کو 2 سے تقسیم کریں تب آپ کو ہمیشہ اس عدد کا نصف حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کے کسی بھی نقطہ سے وتر بنانے پر وتر اور دائرہ کے درمیان بننے والا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔

(v) اگر ایک چار ضلعی کے تمام اضلاع اور داخلی زاویے مساوی ہوں تب یہ ایک مربع ہوگا۔

مشق 15.1

1. بتلایئے کہ ذیل کے بیانات ہمیشہ صادق، ہمیشہ کاذب یا غیر واضح ہیں۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) ایک مہینہ میں 27 دن ہوتے ہیں۔

(ii) مکر سنکرانتی جمعہ کو واقع ہوتی ہے۔

(iii) حیدرآباد میں درجہ حرارت 2^0C ہے۔

(iv) صرف زمین ہی وہ سیارہ ہے جہاں زندگی کا وجود ہے۔

(v) کتے اڑ سکتے ہیں۔

(vi) فبروری میں صرف 28 دن ہوتے ہیں۔

2. بتلایئے کہ ذیل کے بیانات صادق ہیں یا کاذب اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے۔

(i) ایک چار ضلعی کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 350^0 ہوتا ہے۔

(ii) کوئی حقیقی عدد x کے لیے $x^2 \geq 0$

(iii) معین ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(iv) دو جفت اعداد کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

(v) مربع اعداد کو دو طاق اعداد کے مجموعہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

3. موزوں شرائط کے ساتھ ذیل کے جملوں کو دوبارہ لکھیے۔ تا کہ وہ صادق بیانات بن جائیں۔

(i) تمام اعداد کو مفرد اجزائے ضربی میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

(ii) ایک حقیقی عدد کا دوگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔

(iii) کسی x کے لیے $3x + 1 > 4$

(iv) کسی x کے لیے $x^3 \geq 0$

(v) ہر مثلث میں وسطانیہ زاویہ ناصف بھی ہوتا ہے۔

4. موزوں مخالف مثال کے ذریعہ بیان $x > y$ کے لیے $x^2 > y^2$ کو غلط ثابت کیجیے۔

15.4 Reasoning in Mathematics

We human beings are naturally curious. This curiosity makes us to interact with the world. What happens if we push this? What happens if we stuck our finger in that? What happens if we make various gestures and expressions? From this experimentation, we begin to form a more or less consistant picture of the way that the physical world behaves. Gradually, in all situations, we make a shift from

'What happens if.....?' to *'this will happen if'*

The experimentation moves on to the exploration of new ideas and the refinement of our world view of previously understood situations. This description of the playtime pattern very nicely models the concept of 'making and testing hypothesis.' It follows this pattern:

- Make some observations, Collect data based on the observations.
- Draw conclusion (called a 'hypothesis') which will explain the pattern of the observations.
- Test out hypothesis by making some more targeted observations.

So, we have

- A **hypothesis** is a statement or idea which gives an explanation to a series of observations.

Sometimes, following observation, a hypothesis will clearly need to be refined or rejected. This happens if a *single* contradictory observation occurs. In general we use word conjecture in mathematics instead of hypothesis. You will learn the similarities and difference between these two in the higher classes.

15.4.1 Using deductive reasoning in hypothesis testing

There is often confusion between the ideas surrounding proof, making and testing an experimental hypothesis which is mathematics, which is science. The difference is rather simple:

- Mathematics is based on *deductive reasoning* : a proof is a logical deduction from a set of clear inputs.
- Science is based on *inductive reasoning* : hypotheses are strengthened or rejected based on an accumulation of experimental evidence.

Of course, to be good at science, you need to be good at deductive reasoning, although experts at deductive reasoning need not be mathematicians.

Detectives, such as Sherlock Holmes and Hercule Poirot, are such experts : they collect evidence from a crime scene and then draw logical conclusions from the evidence to support the hypothesis that, for example, person M. committed the crime. They use this evidence to create sufficiently compelling deductions to support their hypothesis *beyond reasonable doubt*. The key word here is 'reasonable'.

15.4 ریاضی میں استدلال

انسانوں میں فطرتاً تجسس پایا جاتا ہے' یہ تجسس ہم کو دنیا کے کام کاج میں مدد دیتا ہے۔ اگر ہم اس کو ڈھکیلیں تو کیا ہوگا؟ اگر اس میں اپنا ہاتھ ڈالیں تو کیا ہوگا؟ مختلف حرکات وسکنات کا دوسروں پر کیا اثر ہوگا؟ ان تجربات کی بناء پر ہم سماج کا ایک قابل اعتبار خاکہ بنالیتے ہیں۔ گزرتے ہوئے حالات کے ساتھ ہمارے سوچنے کا انداز بھی بدلتا ہے۔ ہمارے خیالات اگر ایسا ہوتو کیا ہوگا؟ سے'اگر ایسا ہوتو ایسا ہوگا' کی طرف مائل ہوں گے۔

تجربات نئے خیالات کو جنم دیتے ہیں اور گزشتہ کے واقعات ہمارے احساسات کو نئی جہت دیتے ہیں۔

- چند مشاہدات کیجیے' ان مشاہدات پر اعداد وشمار اکٹھا کیجیے۔
- نتیجہ اخذ کیجیے (پہلے مفروضہ بنایئے) جو مشاہدات کی ترتیب کو واضح کرتا ہے۔
- بعض مخصوص مشاہدات سے مفروضہ کی جانچ کیجیے۔

لہٰذا

- مفروضہ ایک بیان یا خیال ہوتا ہے جو مشاہدات کی سلسلہ وار ترتیب کو ظاہر کرتا ہے۔

مشاہدات کے بعد بعض مرتبہ مفروضہ میں ردوبدل یا پھر اسے رد کرنے کی بھی ضرورت پڑتی ہے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جب ایک واحد متضاد تجربہ سامنے آتا ہے۔ عام طور پر ریاضی میں لفظ مفروضہ کے بجائے لفظ اقتباس کا استعمال ہوتا ہے۔ ان کے درمیان فرق اور یکسانیت آپ اپنی اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔

15.4.1 مفروضہ کی جانچ میں استخراجی دلیل

ثبوت سے متعلق مفروضات اکثر وبیشتر الجھن پیدا کرتے ہیں اور شاید یہی حساب ہے۔ جب کہ مفروضہ اور تجربات کی بناء پر جسے ثابت کیا جاسکتا ہے وہ سائنس ہے۔ لیکن دونوں کا فرق معمولی ہے۔

- ریاضی استخراجی استدلال پر مبنی ہوتی ہے' ثبوت ایک منطقی تخفیف ہے جس کو توضیحات سے ثابت کیا جاتا ہے۔
- سائنس استخراجی استدلال پر مبنی ہوتی ہے۔ تجربات کو یکجا کرتے ہوئے مفروضات کو یا تو ثابت کیا جاتا ہے یا انہیں مسترد کیا جاسکتا ہے۔

سائنس میں بہتر کارکردگی کے لیے آپ کو استخراجی دلائل پیش کرنے کی اہلیت رکھنا ہوگا۔ اگر چہ ایسے افراد ضروری نہیں کہ ریاضی کے ماہر ہوں۔

شرلاک ہومس اور ہرکیول پیاروٹ جیسے جاسوسی کردار' ایسے ہی ماہرین میں شمار کیے جاتے تھے، ایسے ہی لوگ جائے واردات سے ثبوت اکٹھا کرتے ہوئے نتائج پر پہنچتے تھے۔ مثال کے طور پر بعضوں نے اس طرح مفروضہ گھڑا کہ ایک شخص 'M' نے جرم کیا ہے اس کی بنیاد پر وہ اس طرح کے نتائج اخذ کرتے ہیں کہ ان کے مفروضات صحیح ثابت ہونے میں کوئی شک باقی نہ رہے۔ اصل الفاظ جن پر ہمیں غور کرنا ہے وہ ''حجت قائم کرنا'' ہیں۔

15.4.2 Deductive Reasoning

The main logical tool used in establishing the truth of an **unambiguous** statement is *deductive reasoning*. To understand what deductive reasoning is all about, let us begin with a puzzle for you to solve.

You are given four cards. Each card has a number printed on one side and a letter on the other side.

$$\boxed{A} \quad \boxed{V} \quad \boxed{8} \quad \boxed{5}$$

Suppose you are told that these cards follow the rule:

"If a card has an odd number on one side, then it has a vowel on the other side."

What is the **smallest number** of cards you need to turn over to check if the rule is true?

Of course, you have the option of turning over all the cards and checking. But can you manage with turning over a fewer number of cards?

Notice that the statement mentions that a card with an odd number on one side has a vowel on the other. It does not state that a card with a vowel on one side must have an odd number on the other side. That may or may not be so. The rule also does not state that a card with an even number on one side must have a consonant on the other side. It may or may not.

So, do we need to turn over $\boxed{A}$? No! Whether there is an even number or an odd number on the other side, the rule still holds.

What about $\boxed{8}$? Again we do not need to turn it over, because whether there is a vowel or a consonant on the other side, the rule still holds.

But you do need to turn over $\boxed{V}$ and 5. if $\boxed{V}$ has an odd number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if $\boxed{5}$ has a consonant on the other side, then the rule has been broken.

The kind of reasoning we have used to solve the puzzle is called **deductive reasoning**. It is called 'deductive' because we arrive at (i.e., deduce or infer) a result or a statement from a previously established statement using logic. For example, in the puzzle by a series of logical arguments we deduced that we need to turn over only $\boxed{V}$ and $\boxed{5}$.

Deductive reasoning also helps us to conclude that a particular statement is true, because it is a special case of a more general statement that is known to be true. For example, once we prove that the product of two even numbers is always even, we can immediately conclude (without computation) that 56702×19992 is even simply because 56702 and 19992 are even.

15.4.2 استخراجی دلیل

کسی واضح بیان کی صداقت جانچنے میں استخراجی دلیل ہی ایک حجت ہوتی ہے۔

استخراجی استدلال کیا ہے سمجھنے سے پہلے ہم آپ کو ایک معمہ حل کرنے کے لیے دیتے ہیں۔

آپ کو چار کارڈس دیے جائیں گے ہر کارڈ کے ایک رخ پر ایک عدد لکھا ہوگا اور دوسرے رخ پر ایک حرف۔

A	V	8	5

فرض کرلیجیے کہ یہ کارڈس بعض اصول کے تابع ہیں۔

''اگر کارڈ کے ایک رخ پر ایک طاق عدد ہو تب اس کے دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہے''۔

اگر اصول صحیح ہو تو آپ کو جانچنے کے لیے کم از کم کتنے بار کو کارڈ کو پلٹانا ہوگا؟

آپ کو تمام کارڈس کو پلٹاتے ہوئے جانچنے کا موقع ضرور دیا جائے گا لیکن اب کیا آپ چند کارڈوں کو پلٹاتے ہوئے جانچ کر سکتے ہیں؟

کارڈ کے ایک رخ پر ایک طاق عدد ہے جب کہ دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہے۔ یہاں یہ نہیں بتلایا گیا ہے کہ کارڈ کے ایک رخ پر حرف علت ہو تو دوسرے رخ پر طاق عدد کا ہونا ضروری ہے۔ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہوسکتا ہے۔ اصول سے یہ بھی واضح نہیں کہ کارڈ کے ایک رخ پر ایک جفت عدد ہے تو اس کے دوسرے رخ پر ایک حرف صحیح کا ہونا ضروری ہے۔ یہ ہو بھی سکتا ہے، اور نہیں بھی۔

کیا ہمیں $\boxed{A}$ کو پلٹانا ہوگا؟ نہیں! چاہے دوسرے رخ پر ایک جفت عدد ہو یا ایک طاق عدد ہو۔ اصول اپنی جگہ قائم رہے گا۔

$\boxed{8}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ ہم کو اسے دوبارہ پلٹانے کی ضرورت نہیں۔ کیونکہ چاہے دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہو یا ایک حرف صحیح ہو، اصول اپنی جگہ قائم رہے گا۔

لیکن آپ کو $\boxed{V}$ اور $\boxed{5}$ کو پلٹانے کی ضرورت پڑے گی۔ اگر $\boxed{V}$ کے دوسرے رخ پر ایک طاق عدد ہے تب اصول قائم نہیں رہے گا۔ اسی طرح اگر $\boxed{5}$ کے دوسرے رخ پر ایک حرف صحیح ہو تب بھی اصول قائم نہیں رہے گا۔

استدلال کی یہ قسم جسے ہم نے معمہ کو حل کرنے کی بنیاد بنائی ہے استخراجی استدلال کہلاتی ہے۔ یہ استخراجی اس لیے کہلاتی ہے کہ ہم یہاں سابقہ اخذ کردہ بیان کے ذریعہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔ مثال کے طور پر اوپر کے معمہ میں ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ ہمیں صرف $\boxed{V}$ اور $\boxed{5}$ کو پلٹانے کی ضرورت ہے۔

استخراجی استدلال ہم کو یہ نتیجہ اخذ کرنے میں بھی مدد دیتا ہے کہ ایک مخصوص بیان صادق ہے۔

مثال کے طور پر ہم ایک دفعہ ثابت کر چکے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ جفت عدد ہوتا ہے، ہم فوری طور پر نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ (بغیر تخمینہ کے) 56702×19992 کا حاصل جفت ہے کیونکہ 56702 اور 19992 جفت ہیں۔

Consider some other examples of deductive reasoning:

i. If a number ends in '0' it is divisible by 5. 30 ends in 0.

From the above two statements we can deduce that 30 is divisible by 5 because it is given that the number ends in 0 is divisible by 5.

ii. Some singers are poets. All lyricists are Poets.

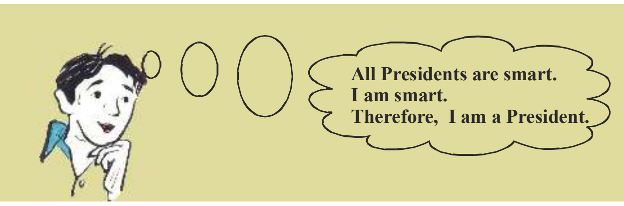
Here the deduction based on two statemens is wrong. (Why?) All lyricist are poets (wrong). Because we are not sure about it. There are three posibilities (i) all lyricists could be poets, (ii) few could be poets or (iii) none of the lyricists is a poet.

You may come to a conclusion that if - then conditional statement comes into deductive reasoning. In mathematics we use this reasoning a lot like if linear pair of angles are 180°. Then only the sum of angles in a triangle is equal to 180°. Like wise if we are using decimal number system to write a number 5. If we use the binary system we represent the quantity by 101.

Unfortunately we do not always use correct reasoning in our daily life. We often come to many conclusions based on faulty reasoning. For example, if your friend does not talk to you one day, then you may conclude that she is angry with you. While it may be true that "if she is angry at me she will not talk to me", it may also be true that "if she is busy, she will not talk to me. Why don't you examine some conclusions that you have arrived at in your day-to-day existence, and see if they are based on valid or faulty reasoning?

Exercise - 15.2

1. Use deductive reasoning to answer the following:
   i. Human beings are mortal. Jeevan is a human being. Based on these two statements, what can you conclude about Jeevan ?
   ii. All Telugu people are Indians. X is an Indian. Can you conclude that X belongs to Telugu people.
   iii. Martians have red tongues. Gulag is a Martian. Based on these two statements, what can you conclude about Gulag?
   iv. What is the fallacy in the Raju's reasoning in the cartoon below?



استخراجی استدلال کی چند دوسری مثالوں پر غور کیجیے۔

(i) اگر ایک عدد '0' پر ختم ہوتا ہے تو وہ 5 سے قابل تقسیم ہے۔30، '0' پر ختم ہوتا ہے۔

اوپر کے دو بیانات کا استخراج ہم اس طرح کر سکتے ہیں 30، 5 سے قابل تقسیم ہے کیونکہ دیا گیا ہے کہ '0' پر ختم ہونے والا عدد 5 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

(ii) چند گلوکار شاعر ہیں، تمام گیت کار شاعر ہیں۔

یہاں دو بیانات پر مبنی استخراج غلط ہے۔(کیوں؟)

تمام گیت کار شاعر ہیں (غلط) کیونکہ ہم کو اس کا کامل یقین نہیں ہے۔ یہاں تین ممکنات ہیں۔(i) تمام گیت کار شاعر ہو سکتے ہیں۔(ii) چند شاعر ہو سکتے ہیں۔(iii) گیت کاروں میں سے کوئی بھی شاعر نہیں ہے۔

آپ اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر......تب بیان استخراجی استدلال پر مبنی ہوتا ہے۔ ریاضی میں ہم یہ استدلال زیادہ استعمال کرتے ہیں۔ جیسا کہ 'اگر خطی زاویوں کا جوڑ 180^0 ہو تب ہی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔ اسی طرح ہم عدد 5 لکھنے کے لیے عشری نظام کا استعمال کرتے رہے ہیں۔ اگر دو عنصری نظام کو استعمال کریں گے تو ہمیں 5 کو 101 سے ظاہر کرنا پڑے گا۔

بدقسمتی سے ہماری روزمرہ زندگی میں ہم دلائل پر گفتگو نہیں کرتے۔ ہم اکثر غلط استدلال پر مبنی کئی نتائج اخذ کر لیتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر آپ کی سہیلی ایک دن آپ سے بات نہیں کرتی ہے تو آپ یہ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ وہ آپ پر غصّہ ہے۔ جب کہ یہ بھی صحیح ہو سکتا ہے کہ ''اگر وہ مجھ پر غصّہ میں ہو تو وہ مجھ سے بات نہیں کرے گی''، یہ بھی ہو سکتا ہے کہ ''اگر وہ مصروف ہو تو مجھ سے بات نہیں کرے گی''۔

آپ روزمرہ حالات کے بعض نتائج کی جانچ کیوں نہیں کرتے؟ اور کیوں نہیں دیکھتے کہ وہ واجبی غیر واجبی دلائل پر مبنی تو نہیں؟

مشق 15.2

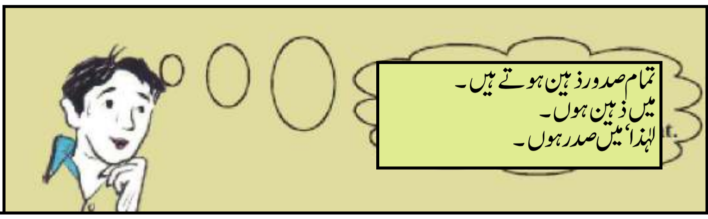
1. استخراجی استدلال کے ذریعہ ذیل کے جواب دیجیے۔

(i) انسان فانی ہے، جاوید ایک انسان ہے، ان دو بیانات کی بنیاد پر جاوید کے متعلق آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(ii) تمام تلگو عوام ہندوستانی ہیں۔ 'x' ایک ہندوستانی ہے۔ کیا آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ 'x' تلگو عوام سے تعلق رکھتا ہے۔

(iii) مراقش کے لوگوں کی زبان سرخ ہوتی ہے۔ رحیم مراقش کا شہری ہے، ان دو بیانات کی بنیاد پر رحیم کے متعلق آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(iv) نیچے کے کارٹون میں احمد کے استدلال میں کیا غلطی ہے؟



2. Once again you are given four cards. Each card has a number printed on one side and a letter on the other side. Which are the only two cards you need to turn over to check whether the following rule holds?

   "If a card has a consonant on one side, then it has an odd number on the other side."

B	3	U	8

3. Think of this puzzle What do you need to find a chosen number from this square?

   Four of the clues below are true but do nothing to help in finding the number.

   Four of the clues are necessary for finding it.

   Here are eight clues to use:

   a. The number is greater than 9.

   b. The number is not a multiple of 10.

   c. The number is a multiple of 7.

   d. The number is odd.

   e. The number is not a multiple of 11.

   f. The number is less than 200.

   g. Its ones digit is larger than its tens digit.

   h. Its tens digit is odd.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

   What is the number?

   Can you sort out the four clues that help and the four clues that do not help in finding it? First follow the clues and strike off the number which comes out from it. Like - from the first clue we come to know that the number is not from 1 to 9 strike off them.

   After completing the puzzle, see which clue is important and which is not?

15.5 Theorems, Conjectures and Axioms

So far we have discussed statements and how to check their validity. In this section, you will study how to distinguish between the three different kinds of statements, Mathematics is built up from, namely, a theorem, a conjecture and an axiom.

You have already come across many theorems before. So, what is a theorem? A mathematical statement whose truth has been established (proved) is called a *theorem*. For example, the following statements are theorems.

2. ایک بار پھر آپ کو چار کارڈ دیے گئے ہیں' ہر کارڈ کے ایک رخ پر ایک عدد لکھا ہے' اور دوسرے رخ پر ایک حرف۔ یہ دیکھنے کے لیے کہ اصول قائم رہتا ہے وہ دو کارڈس کونسے ہیں جس کو پلٹانے کی ضرورت پڑے گی؟

''اگر ایک کارڈ کے ایک رخ پر ایک حرف صحیح ہو' تب اس کے دوسرے رخ پر ایک طاق عدد ہوگا''

B　　3　　U　　8

3. اس معمہ پر غور کیجیے' اس مربع سے ایک منتخبہ عدد معلوم کرنے کے لیے آپ کو کس کی ضرورت ہے؟

ذیل میں دیے گئے اشاروں میں سے 4 اشارے صحیح ہیں' لیکن عدد معلوم کرنے کے لیے وہ کارآمد نہیں۔ اس کو معلوم کرنے کے لیے چار اشارے ضروری ہیں۔

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

یہاں آٹھ اشارے دیے گئے ہیں۔

(a) عدد 9 سے بڑا ہے۔

(b) عدد 10 کا ضعف نہیں ہے۔

(c) عدد 7 کا ضعف ہے۔

(d) عدد طاق ہے۔

(e) عدد 11 کا ضعف نہیں ہے۔

(f) عدد 200 سے چھوٹا ہے۔

(g) اس کے اکائی کا ہندسہ دہائی کے ہندسہ سے بڑا ہے۔

(h) اس کے دہائی کا ہندسہ طاق ہے۔

عدد کیا ہے؟

کیا آپ مدد دینے والے چار اشارے اور مدد نہ دینے والے چار اشاروں کو الگ الگ کر سکتے ہیں؟

پہلے اشاروں کو سمجھئے اور اس سے باہر آنے والے عدد کو حذف کر دیجیے۔

جیسے: پہلے اشارہ سے ہم کو پتہ چلتا ہے کہ 1 سے 9 تک اعداد میں وہ عدد نہیں ہے۔(1 سے 9 تک اعداد کو حذف کر دیجیے)

معمہ کے ختم پر دیکھئیے کہ کونسا اشارہ اہم ہے اور کونسا نہیں؟

15.5 مسئلے' مفروضے اور موضوع

اب تک ہم نے بیانات اور ان کی صداقت کی جانچ کے بارے میں سیکھا ہے' اس حصّہ میں آپ پڑھیں گے کہ تین مختلف اقسام کے بیانات کو کس طرح تقسیم کیا جاتا ہے۔ ریاضی' ایک مسئلہ' ایک مفروضہ اور ایک موضوعہ پر مبنی ہوتی ہے۔

ہم نے پہلے ہی کئی مسئلوں پر غور کیا ہے۔ مسئلہ کیا ہے؟ ایک ریاضیاتی بیان جس کی صداقت کو ثابت کیا جا سکتا ہے' مسئلہ کہلاتا ہے۔ مثلاً ذیل کے بیانات مسئلے ہیں۔

Theorem-15.1 : The sum of the interior angles of a triangle is 180°.

Theorem-15.2 : The product of two odd natural numbers is odd.

Theorem-15.3 : The product of any two consecutive even natural numbers is divisible by 4.

A *conjecture* is a statement which we believe as true, based on our mathematical understanding and experience, i.e., our mathematical intuition. The conjecture may turn out to be true or false. If we can prove it, then it becomes a theorem. Mathematicians often come up with conjectures by looking for patterns and making intelligent mathematical guesses. Let us look at some patterns and see what kind of intelligent guesses we can make.

While studying some cube numbers Raju noticed that "if you take three consecutive whole numbers and multiply them together and then add the middle number of the three, you get the middle number cubed"; *e.g.*, 3, 4, 5, gives $3 \times 4 \times 5 + 4 = 64$, which is a perfect cube. Does this always work? Take some more consecutive numbers and check it.

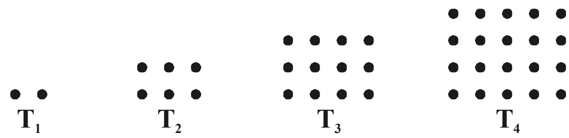
Rafi took 6, 7, 8 and checked this conjecture. Here 7 is the middle term so according to the rule $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$, which is also a perfect cube. Try to generalize it by taking numbers as n, $n + 1$, $n + 2$. See other example:

Example-6. The following geometric arrays suggest a sequence of numbers.

(a) Find the next three terms.

(b) Find the 100th term.

(c) Find the n^{th} term.



The dots here arranged in such a way that they form a rectangle. Here $T_1 = 2$, $T_2 = 6$, $T_3 = 12$, $T_4 = 20$ and so on. Can you guess what T_5 is? What about T_6? What about T_n?

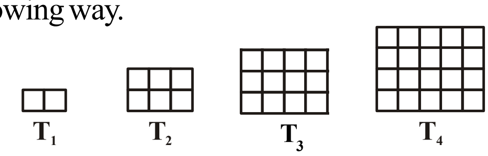
Make a conjecture about T_n.

It might help if you redraw them in the following way.

Solution :

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	6	12	20	?	.....

$$\underbrace{2\quad 6}_{+4}\ \underbrace{\quad 12}_{+6}\ \underbrace{\quad 20}_{+8}\ \underbrace{\quad ?}_{+10}$$



So, $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... Try for T_7?

$T_{100} = 100 \times 101 = 10,100$

$T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

مسئلہ 15.1 : ایک مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.2 : دو طاق طبعی اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.3 : دو متصلہ جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب 4 سے قابل تقسیم ہے۔

مفروضہ ایک بیان ہے جس کی صداقت پر ہم یقین رکھتے ہیں جو ہمارے ریاضیاتی فہم اور تجربہ پر مبنی ہوتا ہے اور یہی ریاضیاتی جبلت ہے۔ مفروضہ صادق یا کاذب ہوتا ہے جس کو ثابت کرنے پر وہ ایک ''مسئلہ'' میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ اکثر ماہرین ریاضی نے حسابی نمونوں اور معموں کو حل کرنے کے لئے مفروضات سے مدد لی اور ریاضیاتی تخمینوں سے مسئلے حل کرتے ہوئے شہرت پائی۔ ہم ایسے ہی چند نمونوں پر غور کرتے ہیں' دیکھیں تو بھلا آپ اس سلسلہ میں اپنی ذہانت کو کس طرح استعمال کریں گے؟

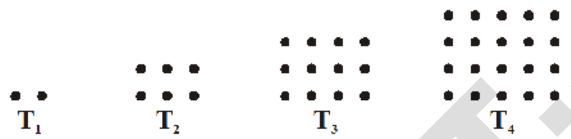
اعداد کے مکعب کا مطالعہ کرتے وقت اسلم نے غور کیا کہ اگر آپ تین متصلہ اعداد کو ضرب دیں اور اس میں درمیانی عدد کو جمع کریں تب آپ درمیانی عدد کا مکعب حاصل کریں گے۔

مزید متصلہ اعداد لے کر جانچ کیجیے

شکیل نے 8'7'6 لے کر اس مفروضہ کی جانچ کی۔ یہاں 7 درمیانی عدد ہے' اصول کے مطابق $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$ جو کہ ایک کامل مکعب ہے۔

مفروضہ n' $n + 1$ اور $n + 2$ لیتے ہوئے ایک عام نتیجہ پر پہنچیے۔ دوسری مثال بھی دیکھیے۔

مثال (6) : ذیل کی جیومتریائی صف بندی اعداد کے تسلسل کو ظاہر کرتی ہے۔



(a) اگلے تین ارکان معلوم کیجیے۔

(b) 100 واں رکن معلوم کیجیے۔

(c) n واں رکن معلوم کیجیے۔

یہاں نقاط اس طرح سے ترتیب دیے گئے ہیں کہ وہ ایک مستطیل کی شکل اختیار کرتے ہیں۔

یہاں $T_1 = 2, T_2 = 6, T_3 = 12, T_4 = 20, \ldots\ldots.$

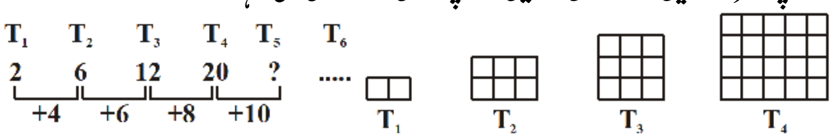
کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ T_5 کیا ہوگا؟

T_6 کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ T_n کیا ہوگا؟

T_n کے لیے ایک مفروضہ بنائیے۔

اگر آپ مفروضہ ذیل کے مطابق بنائیں تو آپ کو اس سے مدد مل سکتی ہے۔

حل :



اس طرح $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

T_7 کے لیے کوشش کیجیے ..... $T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$

$T_{100} = 100 \times 101 = 10, 100$

$\therefore\ T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

This type of reasoning which is based on examining a variety of cases or sets of data, discovering patterns and forming conclusions is called ***inductive reasoning***. Inductive reasoning is very helpful technique for making conjecture.

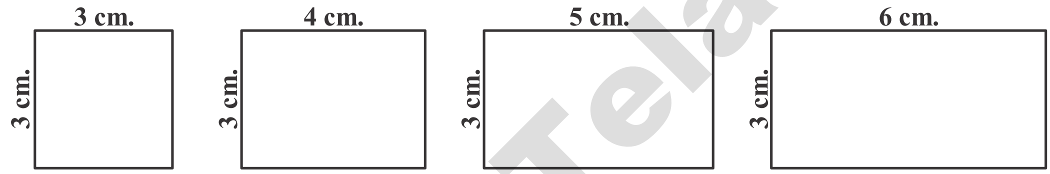
Gold bach the famous mathematician in 1743, put forward a pattern observe it :

$6 = 3 + 3$ $\qquad$ $8 = 3 + 5$ $\qquad$ $10 = 3 + 7$

$12 = 5 + 7$ $\qquad$ $14 = 11 + 3$ $\qquad$ $16 = 13 + 3 = 11 + 5$

From the above we observe that every even number greater than 4 can be written as the sum of two primes (not necessarily distinct primes). His conjecture has not been proved to be true or false so far. Perhaps you will prove that this result is true or false and will become a theorem.

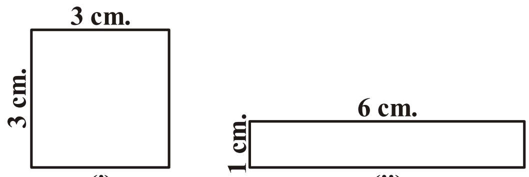
But just by looking few patterns some time lead us to a wrong conjecture like: in class 8th Janvi and Kartik while studying Area and Perimeter chapter..... observed a pattern



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Perimeter :	**12 cm.**	**14 cm.**	**16 cm.**	**18 cm.**
Area :	**9 cm^2**	**12 cm^2**	**15 cm^2**	**18 cm^2**

and stated a conjecture that when the perimeter of the rectangle increases the area will also increase. What do you think? Are they right? While working on this pattern.

Inder drew some rectangles and disproved the conjecture stated by Janvi and Kartik.

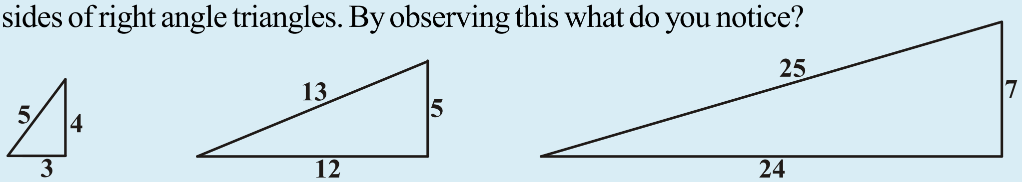


	(i)	(ii)
Perimeter :	**12 cm.**	**14 cm.**
Area :	**9 cm^2**	**6 cm^2**

We understand that while making a conjecture we have to look at all the possibilities.

Try This

Envied by the popularity of Pythagoras his disciple claimed a different relation between the sides of right angle triangles. By observing this what do you notice?



(i) $\qquad$ **(ii)** $\qquad$ **(iii)**

استدلال کی وہ قسم جو مختلف حالتوں یا معطیات کے سٹس کی جانچ نمونوں کے انکشاف اور نتائج قائم کرنے پر مبنی ہو' استخراجی استدلال کہلاتی ہے۔ استخراجی استدلال مفروضہ بنانے کا ایک کارآمد طریقہ کار ہے۔

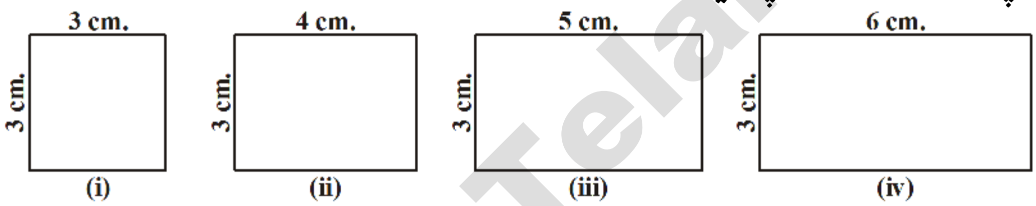
گولڈ بیاچ نے جو کہ ایک معروف ریاض داں تھا اعداد کے بعض نمونوں پر غور کرتے ہوئے دلچسپ دلائل پیش کئے۔

$10 = 3 + 7$ $8 = 3 + 5$ $6 = 3 + 3$

$16 = 13 + 3 = 11 + 5$ $14 = 11 + 3$ $12 = 5 + 7$

1743 میں گولڈ بیاچ نے ان نمونوں سے یہ نتیجہ نکالا کہ ہر جفت عدد جو 4 سے بڑا ہو دو مفرد اعداد کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ (ضروری نہیں کہ یہ مفرد اعداد متفرق مفرد اعداد ہوں) اب تک یہ ثابت نہیں کیا جا سکا کہ گولڈ بیاچ کے یہ مفروضات صحیح ہیں یا غلط۔ ہوسکتا ہے کہ آپ ان نتائج کو ثابت کریں اور شہرت حاصل کرلیں!

لیکن بعض دفعہ چند ہی نمونوں کا دیکھنا ہمیں غلط نتائج کے طرف لیجاتا ہے۔ جیسا کہ: جماعت ہشتم میں رحیم اور کریم نے باب ''رقبہ اور احاطہ'' پڑھتے وقت ......ان نمونوں پر غور کیا۔

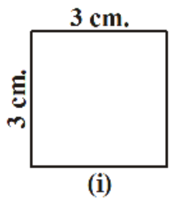


	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
احاطہ	12 سمر	14 سمر	16 سمر	18 سمر
رقبہ	9 مربع سمر	12 مربع سمر	15 مربع سمر	18 مربع سمر

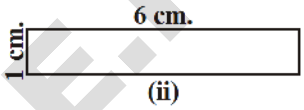
اور انہوں نے ایک مفروضہ قائم کرلیا کہ جب مستطیل کا احاطہ بڑھتا ہے تو اس کا رقبہ بھی بڑھتا ہے۔ آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا وہ صحیح ہیں؟

اس نمونہ کی جانچ کے دوران خلیل نے کچھ مستطیل اتارے اور رحیم اور کریم کے بیان کردہ مفروضہ کو غلط ثابت کیا۔

اس لیے آپ کو مفروضہ قائم کرتے وقت تمام پہلوؤں پر غور کرنا ہوگا۔



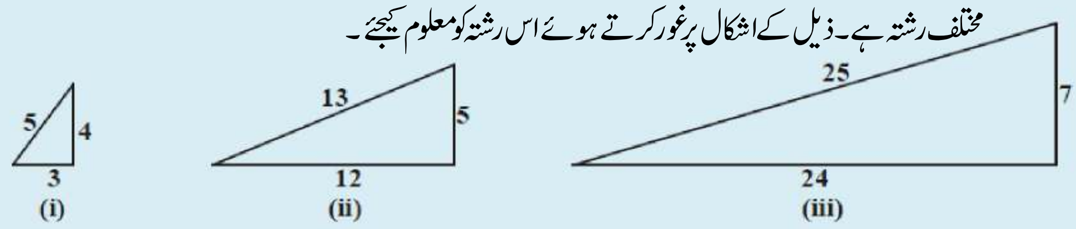
احاطہ = 12 سمر
رقبہ = 9 مربع سمر



احاطہ = 14 سمر
رقبہ = 6 مربع سمر

کوشش کیجیے

فیثاغورث کی شہرت سے حسد کرتے ہوئے اس کے شاگرد نے یہ دعویٰ کیا کہ قائمۃ الزاویہ مثلثات کے اضلاع کے درمیان ایک مختلف رشتہ ہے۔ ذیل کے اشکال پر غور کرتے ہوئے اس رشتہ کو معلوم کیجیے۔



Liethagoras Theorem : In any right angle triangle the square of the smallest side equals the sum of the other sides.

Check this conjucture, whether it is right or wrong.

You might have wondered - do we need to prove every thing we encounter in mathematics and if not, why not?

In mathematics some statements are assumed to be true and are not proved, these are self-evident truths' which we take to be true without proof. These statements are called *axioms*. In chapter 3, you would have studied the axioms and postulates of Euclid. (We do not distinguish between axioms and postulates these days generally we use word postulate in geometry).

For example, the first postulate of Euclid states:

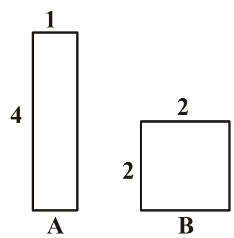
A straight line may be drawn from any point to any other point.

And the third postulate states:

A circle may be drawn with any centre and any radius.

These statements appear to be perfectly true and Euclid assumed them to be true. Why? This is because we cannot prove everything and we need to start somewhere, we need some statements which we accept as true and then we can build up our knowledge using the rules of logic based on these axioms.

You might then wonder why don't we just accept all statements to be true when they appear self evident. There are many reasons for this. Very often our intuition can be wrong, pictures or patterns can deceive and the only way to be sure that something is true is to prove it. For example, many of us believe that if a number is added to another number, the result will be large than the numbers. But we know that this is not always true : for example $5 + (-5) = 0$, which is smaller than 5.



Also, look at the figures. Which has bigger area ?

It turns out that both are of exactly the same area, even though B appears bigger.

You might then wonder, about the validity of axioms. Axioms have been chosen based on our intuition and what appears to be self-evident. Therefore, we expect them to be true. However, it is possible that later on we discover that a particular axiom is not true. What is a safeguard against this possibility? We take the following steps:

لیتھا غورث مسئلہ: کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں سب سے چھوٹے ضلع کا مربع دوسرے دوضلعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس مفروضہ کی جانچ کیجیے آیا یہ صحیح ہے یا غلط۔

سوچیں تو بھلا! کیا ہم کو ریاضی میں ہر چیز کو ثابت کرنا ضروری ہے۔اگر نہیں ہے تو کیوں نہیں؟

ریاضی میں بعض بیانات کو سچ تو مانا جاتا ہے لیکن انہیں ثابت نہیں کیا جاسکتا۔ان کو (ازخود دلائلی صداقتیں) کہا جاتا ہے۔جس کو ہم بغیر ثابت کیے ہی سچ مان لیتے ہیں۔یہ موضوعے کہلاتے ہیں۔باب 3 میں ہم یوکلڈ کے نظریات اور موضوعوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ (آج کے دور میں ہم اقتباسات اور موضوعوں کے درمیان فرق نہیں کرتے اور یوں جیومٹری میں لفظ 'اقتباس' کا ہی استعمال کیا جارہا ہے)۔

مثلاً یوکلڈ کا پہلا نظریہ بیان کرتا ہے:

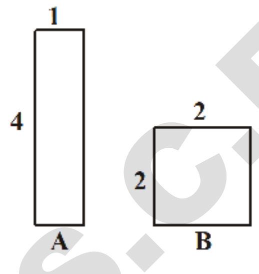
ایک خط مستقیم' ایک نقطہ سے کوئی بھی دوسرے نقطہ تک کھینچی جاسکتی ہے۔

اور تیسرا موضوعہ بیان کرتا ہے :

ایک دائرہ کوئی بھی مرکز اور کوئی بھی نصف قطر سے کھینچا جاسکتا ہے۔

یہ بیانات چونکہ بالکل صحیح نظر آتے ہیں یوکلڈ نے انہیں صحیح متصور کرلیا۔کیوں؟ یہ اس وجہ سے کہ ہم ہر چیز کو ثابت نہیں کرسکتے ہم کو کہیں نہ کہیں مفروضات کا سہارا لینا پڑتا ہے۔ان موضوعوں کی بناء پر چند بیانات کو سچ قبول کرتے ہوئے منطقی اصول کو استعمال کرنا پڑتا ہے' تب ہی ہمارا علم وسیع ہوگا۔

آپ سوچتے ہوں گے کہ جب بیانات ازخود سچ ظاہر ہوتے ہیں تو کیوں نہ ہم تمام بیانات کو سچ ہی قبول کرلیں؟ اس کی کئی وجوہات ہیں۔ اکثر ہمارے تخیّلات غلط ہوسکتے ہیں' تصویروں اور مثالوں سے دھوکہ ہوسکتا ہے' ایسے میں کسی بات کے صحیح ہونے کے لیے اسے ثابت کرنا ہی ایک یقینی امر ہوتا ہے۔مثال کے طور پر ہم میں سے کئی اس بات پر یقین کرلیتے ہیں کہ اگر ایک عدد کو دوسرے عدد میں جمع کیا جاتا ہے تو حاصل ہونے والا عدد ان اعداد سے بڑا ہوگا لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہوتا مثلاً $5 + (-5) = 0$ جو کہ 5 سے چھوٹا ہے۔



ان اشکال کو دیکھیے کس شکل کا رقبہ زیادہ ہے۔

دونوں یکساں رقبہ رکھتے ہیں حالانکہ B بڑا ظاہر ہورہا ہے۔

موضوعوں کے کارآمد ہونے کے بارے میں آپ کو حیرت ہوگی کہ ہمارے تخیلات اور ان اقدامات کی بنیاد پر جواز خود ظاہر ہوتے ہیں اور یوں ہم موضوعوں کا انتخاب کرتے ہیں۔ لیکن یہ ممکن ہے کہ مابعد ہمیں یہ پتہ چلے کہ کوئی موضوعہ صحیح نہیں ہے۔اس امکان پر ہم ذیل کے نکات پیش نظر رکھیں گے۔

i. Keep the axioms to the bare minimum. For instance, based only on axioms and five postulates of Euclid, we can derive hundreds of theorems.

ii. Make sure that the axioms are consistent.

We say a collection of axioms is *inconsistent*, if we can use one axiom to show that another axiom is not true. For example, consider the following two statements. We will show that they are inconsistent.

Statement-1 : No whole number is equal to its successor.

Statement-2 : A whole number divided by zero is a whole number.

(Remember, **division by zero is not defined**. But just for the moment, we assume that it is possible, and see what happens.)

From Statement-2, we get $\frac{1}{0} = a$, where a is some whole number. This implies that, 1=0. But this disproves Statement-1, which states that no whole number is equal to its successor.

iii. A false axiom will, sooner or later, result into contradiction. We say that *there is a contradiction, when we find a statement such that, both the statement and its negation are true.* For example, consider Statement-1 and Statement-2 above once again.

From Statement-1, we can derive the result that $2 \neq 1$.

Let $x = y$

$x \times x = xy$

$x^2 = xy$

$x^2 - y^2 = xy - y^2$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ From Statement-2, we can cancel $(x - y)$ from both the sides.

$x + y = y$

But $x = y$

so $x + x = x$

or $2x = x$

$2 = 1$

So we have both the statements $2 = 1$ and its negation, $2 \neq 1$ are true. This is a contradiction. The contradiction arose because of the false axiom, that a whole number divided by zero is a whole number.

So, the statement we choose as axioms require a lot of thought and insight. We must make sure they do not lead to inconsistencies or logical contradictions. Moreover, the choice of axioms themselves, sometimes leads us to new discoveries.

(i) کم سے کم موضوعوں کو لیجیے۔خصوصیت سے یوکلڈ کے پانچ مفروضات اور موضوعوں سے ہم سیکڑوں مسئلے اخذ کر سکتے ہیں۔

(ii) خیال رہے کہ موضوعات کی وجود پر قائم رہیں

ہم کہتے ہیں کہ موضوعے وجود نہیں رکھتے' اگر ہم ایک موضوعے کو استعمال کرتے ہوئے دوسرے موضوعے کو غلط بتانا چاہتے ہیں تو ہم ذیل کے دو بیانات پر غور کریں گے۔ہم یہ بتائیں گے کہ یہ ناقابل اعتبار ہیں۔

بیان (1) : کوئی مکمل عدد اپنے اگلے عدد کے مساوی نہیں ہوتا۔

بیان (2) : ایک مکمل عدد کو صفر سے تقسیم کریں تو صفر حاصل ہوتا ہے۔

(یاد کیجیے کہ صفر سے تقسیم غیر تعریف شدہ ہے۔مگر فرض کر لیجیے کہ یہ ممکن ہے اور دیکھیئے کیا ہوتا ہے)

بیان (2) سے $\frac{1}{0} = a$ ہم حاصل کرتے ہیں' جہاں a کوئی مکمل عدد ہے۔یہ دلالت کرتا ہے کہ $0 = 1$ لیکن یہ بیان (1) کو غلط ثابت کرتا ہے۔جو یہ بیان کرتا ہے کہ کوئی مکمل عدد اپنے اگلے عدد کے مساوی نہیں ہوتا۔

(iii) ایک غلط موضوعہ آخر کار تضاد بیانی ہو جاتا ہے۔جب ہم اس بیان کو اس طرح پاتے ہیں کہ بیان اور اس کا نفی دونوں صادق ہیں تب ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک تضاد ہے۔مثال کے طور پر بیان (1) اور بیان (2) پر دوبارہ غور کریں گے۔

بیان (1) سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $2 \neq 1$

مان لیجیے $x = y$

$$x \times x = xy$$

$$x^2 = xy$$

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ بیان (2) سے ہم دونوں جانب $(x-y)$ کو تقسیم کر سکتے ہیں

تب $x + y = y$

لیکن $x = y$

اس لیے $x + x = x$

یا $2x = x$

ہمارے $2 = 1$

اس طرح ہمارے ہاں دو بیانات $2 \neq 1$ اور اس کا نفی $2 = 1$ صادق ہیں۔یہ ایک تضاد ہے۔

یہ تضاد اس غلط موضوعہ کی وجہ سے ظاہر ہوتا کہ ایک مکمل عدد کو صفر سے تقسیم کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح موضوعوں کے انتخاب کے لیے سوجھ بوجھ اور فراست درکار ہے۔ہم کو یہ یقینی طور پر بتانا چاہیے کہ وہ ناقابل اعتبار نہ ہوں اور تضاد کا سبب نہ بنیں۔موضوعوں کا انتخاب خود بعض اوقات نئی دریافتوں کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

We end the section by recalling the differences between an axiom, a theorem and a conjecture. An **axiom** is a mathematical statement which is true without proof; a **conjecture** is a mathematical statement whose truth or falsity is yet to be established; and a **theorem** is a mathematical statement whose truth has been logically established.

EXERCISE - 15.3

1. (i) Take any three consecutive odd numbers and find their product;

   for example, $1 \times 3 \times 5 = 15$, $3 \times 5 \times 7 = 105$, $5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) Take any three consecutive even numbers and add them, say,

   $2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$ and so on.

   Is there any pattern can you guess in these sums? What can you conjecture about them?

2. Observe the Pascal's triangle.

   Line-1 : $1 = 11^0$

   Line-2 : $11 = 11^1$

   Line-3 : $121 = 11^2$

   Make a conjecture about Line-4 and Line-5.

   Does your conjecture hold? Does your conjecture hold for Line-6 too?

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1

3. Look at the following pattern:

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$, Total number of factors $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$
   28 is divisible by 6 factors i.e. 1, 2, 4, 7, 14, 28

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$, Total number of factors $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$
   30 is divisible by 8 factors i.e. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   Find the pattern.
   (**Hint :** Product of every prime base exponent +1)

4. Look at the following pattern:

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

ایک موضوعہ، ایک مسئلہ اور ایک مفروضہ کے مابین فرق کا اعادہ کرتے ہوئے ہم اس بحث کو ختم کرتے ہیں۔ایک موضوعہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جو بغیر ثابت کیے ہی صادق مانا جاتا ہے۔ایک مفروضہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کا صادق یا کاذب ہونا طے شدہ نہیں ہے جب کہ مسئلہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کی صداقت منطقی طور پر ثابت کی جا چکی ہے۔

مشق 15.3

.1 (i) کوئی تین متصلہ طاق اعداد لیجیے اور ان کا حاصلِ ضرب معلوم کیجیے مثال کے طور پر

$1 \times 3 \times 5 = 15,\ 3 \times 5 \times 7 = 105,\ 5 \times 7 \times 9$ - .....

(ii) کوئی تین متصلہ جفت اعداد لیجیے اور انہیں جمع کیجیے مثلاً

$2 + 4 + 6 = 12,\ 4 + 6 + 8 = 18,\ 6 + 8 + 10 = 24,\ 8 + 10 + 12 = 30$ وغیرہ وغیرہ

کیا ان مجموعوں میں آپ کو کوئی ترتیب نظر آتی ہے؟ان کے بارے میں آپ کا استدلال کیا ہو سکتا ہے؟

.2 پاسکل کے مثلث کا اعادہ کیجیے

سطر (1) : $1 = 11^0$

سطر (2) : $11 = 11^1$

سطر (3) : $121 = 11^2$

سطر (4) اور سطر (5) کے لیے ایک مفروضہ بنائیے۔

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

کیا آپ کا مفروضہ اس کی متابعت میں ہے؟ کیا آپ کا مفروضہ سطر (6) کی مطابقت میں ہے؟

.3 ذیل کے نمونے کو دیکھیے

(i) $28 = 2^2 \times 7^1$، اجزاء کی جملہ تعداد $(2+1)\ (1+1) = 3 \times 2 = 6$

28، 6 اجزاء سے قابل تقسیم ہے جو کہ $1, 2, 4, 7, 14, 28$ ہیں۔

(ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$، اجزاء کی جملہ تعداد $(1+1)\ (1+1)\ (1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

30، 8 اجزاء سے قابل تقسیم ہے جو کہ $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ ہیں۔نمونہ معلوم کیجیے۔

(اشارہ: ہر مفرد اساس کی قوت نما کا حاصل ضرب 1 + ہے)

.4 ذیل کے نمونہ کو دیکھیے

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

Make a conjecture about each of the following:

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

Check if your conjecture is true.

5. List five axioms (postulates) used in this book.

6. In a polynomial $p(x) = x^2 + x + 41$ put different values of x and find $p(x)$. Can you conclude after putting different values of x that $p(x)$ is prime for all. Is x an element of N? Put $x = 41$ in $p(x)$. Now what do you find?

15.6 What is a Mathematical Proof?

Before you study proofs in mathematics, you are mainly asked to verify statements.

For example, you might have been asked to verify with examples that "the product of two odd numbers is odd". So you might have picked up two random odd numbers, say 15 and 2005 and checked that $15 \times 2005 = 30075$ is odd. You might have done so for many more examples.

Also, you might have been asked as an activity to draw several triangles in the class and compute the sum of their interior angles. Apart from errors due to measurement, you would have found that the interior angles of a triangle add up to 180°.

What is the flaw in this method? There are several problems with the process of verification. While it may help you to make a statement you believe is true, you cannot be *sure* that it is true in *all* cases. For example, the multiplication of several pairs of even numbers may lead us to guess that the product of two even numbers is even. However, it does not ensure that the product of all pairs of even numbers is even. You cannot physically check the products of all possible pairs of even numbers because they are endless. Similarly, there may be some triangles which you have not yet drawn whose interior angles do not add up to 180°.

Moreover, verification can often be misleading. For example, we might be tempted to conclude from Pascal's triangle (Q.2 of Exercise), based on earlier verification, that $11^5 = 15101051$. But in fact $11^5 = 161051$.

So, you need another approach that does not depend upon verification for some cases only. There is another approach, namely 'proving a statement'. A process which can establish the truth of a mathematical statement based purely on logical arguments is called a *mathematical proof*.

ذیل میں ہرایک کے لیے ایک مفروضہ لکھیے

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

آپ کے مفروضہ کی صداقت کی جانچ کیجیے۔

5. اس کتاب میں درج پانچ موضوعوں کی فہرست بنائیے۔

6. کثیر رکنی $p(x) = x^2 + x + 41$ میں x کی مختلف قدروں کو رکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ $P(x)$ مفرد ہے؟ کیا x ‘N کا رکن ہے؟ مساوات میں $x = 41$ درج کیجیے تب آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

15.6 ریاضیاتی ثبوت کیا ہے؟

ریاضی میں ثبوتوں کو پڑھنے سے پہلے آپ کو بیانات کی تصدیق کے لیے کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: آپ سے پوچھا گیا ہوگا کہ اس مثال کی تصدیق کریں کہ ''دو طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے''۔ آپ بلا منصوبہ کوئی دو طاق اعداد 15 اور 2005 لیجیے اور جانچیے کہ $15 \times 2005 = 30075$ طاق ہے اور ایسی مزید مثالیں آپ حل کرسکتے ہیں۔

آپ کو کمرہ جماعت میں متعدد مثلثات اتارنے اور ان کے داخلی زاویوں کے مجموعوں کی پیمائش کرنے کے لیے کہا گیا ہوگا۔ زاویوں کی پیمائش میں غلطی کے باوجود جب آپ تینوں زاویوں کو جمع کرتے ہیں تو 180^0 حاصل ہوتا ہے۔

اس طریقہ میں کیا خامی ہے؟ ایسے متعدد مسئلے ہیں جو جانچ کے ذریعہ ثابت ہوتے ہیں۔ تاہم آپ جو بیان بنارہے ہیں اس کے صادق ہونے کا یقین کرتے ہیں، لیکن ہم ہرصورت میں اس کے صحیح ہونے کا یقین نہیں کرسکتے۔ مثال کے طور پر ہم متعدد جفت اعداد کی جوڑیوں کو ضرب دے کر اندازہ لگاتے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔ ہم تمام ممکنہ جفت اعداد کی جوڑیوں کو ضرب دے کر جانچ نہیں کرسکتے۔ کیونکہ جفت اعداد کے جوڑ غیر مختتم ہیں۔ اس طرح چند ایسے مثلثات بھی ہوسکتے ہیں جن کو آپ نے نہیں بنایا ہوگا اور جن کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 سے کم ہوگا۔

بعض دفعہ جانچ بھی ہمیں گمراہ کرتی ہے، مثال کے طور پر ہم نے کبھی پاسکل کے مثلث سے (مشق سابقہ کی تصدیق کے مطابق سوال نمبر 2) کا نتیجہ اخذ کرنے کی کوشش کی ہوگی۔ $11^5 = 15101051$ لیکن اس کی صحیح قدر $11^5 = 161051$ ہے۔

اس لیے آپ کو ایک ایسے طریقہ کار کی ضرورت ہوگی جو صرف مخصوص صورتوں کی تصدیق پر منحصر نہ ہو۔ اس کے علاوہ ایک اور طریقہ ہے جسے ایک بیان کو ثابت کرنے کا نام دیا گیا ہے۔ طریقہ جس کے ذریعہ صرف منطقی دلائل پر مبنی ریاضیاتی بیانات کی صداقت کو پیش کیا جاتا ہے 'ریاضیاتی ثبوت' کہلاتا ہے۔

To make a mathematical statement false, we just have to produce a single counter-example. So while it is not enough to establish the validity of a mathematical statement by checking or verifying it for thousands of cases, it is enough to produce one counter example to *disprove* a statement.

Let us look what should be our procedure to prove.

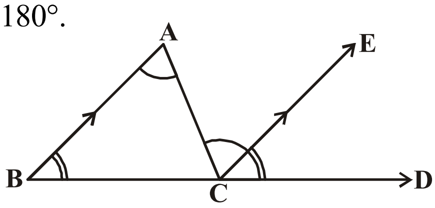
i. First we must understand clearly, what is required to prove, then we should have a rough idea how to proceed.

ii. A proof is made up of a successive sequence of mathematical statements. Each statement is a proof logically deduced from a previous statement in the proof or from a theorem proved earlier or an axiom or our hypothesis and what is given.

iii. The conclusion of a sequence of mathematically true statements laid out in a logically correct order should be what we wanted to prove, that is, what the theorem claims.

To understand that, we will analyse the theorem and its proof. You have already studied this theorem in chapter-4. We often resort to diagrams to help us to prove theorems, and this is very important. However, each statement in proof has to be established using only logic. Very often we hear or said statement like those two angles must be 90°, because the two lines look as if they are perpendicular to each other. Beware of being deceived by this type of reasoning.

Theorem-15.4 : The sum of three interior angles of a triangle is 180°.



Proof : Consider a triangle ABC.

We have to prove that

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

Construct a line CE parallel to BA through C and produce line BC to D.

CE is parallel to BA and AC is transversal.

So, $\angle CAB = \angle ACE$, which are alternate angles. ..... (1)

Similarly, $\angle ABC = \angle DCE$ which are corresponding angles. ..... (2)

adding eq. (1) and (2) we get

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \quad ..... (3)$$

add $\angle BCA$ on both the sides.

We get, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ ..... (4)

But $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$, since they form a straight angle...... (5)

Hence, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

ایک ریاضیاتی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لیے ہم کو ایک واحد مخالف مثال پیش کرنی ہوتی ہے۔لہٰذا ہزاروں صورتوں کے لیے جانچ کرتے ہوئے ایک ریاضیاتی بیان کی صداقت قائم کرنا جہاں نا کافی ہے' وہاں ایک بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے ایک مخالف مثال دینا کافی ہے۔

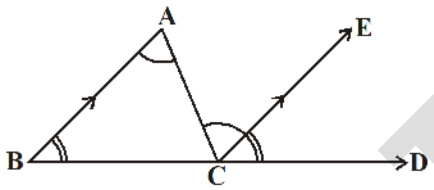
آیئے دیکھتے ہیں کہ ثابت کرنے کا ہمارا طریقہ کیا ہونا چاہیے۔

(i) پہلے ہم کو واضح طور پر سمجھ لینا چاہیے کہ ہم کو کیا ثابت کرنے کی ضرورت ہے' تب اس کو آگے کیسے بڑھانا چاہیے۔

(ii) ریاضیاتی بیانات کی سلسلہ وار ترتیب سے ایک 'ثبوت' بنتا ہے۔ ہر بیان ایک ثبوت ہوتا ہے جس کو سابقہ دلیل سے یا مسئلہ کے ثبوت سے یا کسی موضوعہ سے یا دی گئی معلومات سے منطقی طور پر اخذ کیا گیا ہو۔

(iii) ریاضیاتی صادق بیانات کے سلسلہ کا نتیجہ' جو کہ ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں منطقی طور پر صحیح ترتیب میں ہونا چاہیے جو کہ مسئلہ کے حل کرنے کے لیے مطلوب ہے۔

اس کو سمجھنے کے لیے ہمیں مسئلہ کا تجزیہ کرنا ضروری ہے تا کہ ثبوت فراہم کیا جا سکے۔ آپ یہ مسئلہ پہلے ہی باب 4 میں پڑھ چکے ہیں۔ ہم مسئلوں کو ثابت کرنے کے لیے اکثر اشکال سے مدد لیتے ہیں جو کہ بہت اہم ہے لیکن ثبوت میں ہر مرحلہ کو صرف ترکیبی انداز میں پیش کیا جائے۔ اکثر ہم حسابی بیانات دیتے ہیں جیسے دو خطوط ایک دوسرے پر عمود وار نظر آتے ہیں تو ان کے درمیان کا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔ صرف اندازے پر نتائج نہ نکالیں اس قسم کے بیانات پر ہمیں چوکس رہنے کی ضرورت ہے۔



مسئلہ 15.4 : ایک مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

ثبوت : مثلث ABC پر غور کیجیے

ہم کو ثابت کرنا ہے کہ

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

ایک خط CE کھینچیے جو C سے BA کے متوازی ہو اور خط BC کو D تک بڑھایئے۔

CE' BA کے متوازی ہے اور AC قاطع خط ہے۔

اس لیے $\angle CAB = \angle ACE$ ' متبادل زاویے ہیں .... (1)

اس طرح $\angle ABC = \angle DCE$ ' متناظر زاویے ہیں .... (2)

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \;............\; (3)$$

دونوں جانب $\angle BCA$ جمع کیجیے۔

$$\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE \;............\; (4)$$

لیکن $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180^0$ لہٰذا یہ زاویے ایک خط مستقیم بنائیں گے۔............ (5)

اس لیے $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$

Now, we see how each step has been logically connected in the proof.

Step-1: Our theorem is concerned with a property of triangles. So we begin with a triangle ABC.

Step-2: The construction of a line CE parallel to BA and producing BC to D is a vital step to proceed so that to be able to prove the theorem.

Step-3: Here we conclude that $\angle CAB = \angle ACE$ and $\angle ABC = \angle DCE$, by using the fact that CE is parallel to BA (construction), and previously known theorems, which states that if two parallel lines are intersected by a transversal, then the alternate angles and corresponding angles are equal.

Step-4: Here we use Euclid's axiom which states that "if equals are added to equals, the wholes are equal" to deduce $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$.

That is, the sum of three interior angles of a triangle is equal to the sum of angles on a straight line.

Step-5: Here in concluding the statement we use Euclid's axiom which states that "things which are equal to the same thing are equal to each other" to conclude that

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$$

This is the claim made in the theorem we set to prove.

You now prove theorem-15.2 and 15.3 without analysing them.

Theorem-15.5 : The product of two odd natural numbers is odd.

Proof : Let x and y be any two odd natural numbers.

We want to prove that xy is odd.

Since x and y are odd, they can be expressed in the form $x = (2m - 1)$, $y = 2n - 1$ (for some natural number m, n)

Then, $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$= 4mn - 2m - 2n + 1$

$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$

$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$

Let $2mn - m - n + 1 = l$, any natural number, replace it in the above equation.

$= 2l - 1, l \in \text{N}$

This is definitely an odd number.

اب ہم دیکھتے ہیں کہ ثبوت کا ہر مرحلہ کس طرح ترکیبی طور پر جڑا ہوا ہے۔

مرحلہ (1) : ہمارا مسئلہ مثلثات کی خاصیت سے تعلق رکھتا ہے۔ اس لیے ہم مثلث ABC سے شروع کرتے ہیں۔

مرحلہ (2) : ایک خط BA'CE کے متوازی کھینچیے اور BC کو D تک توسیع دیجیے۔

مرحلہ (3) : BA'CE کے متوازی ہے (عمل) اور دو متوازی خطوط کے قاطع خط سے بننے والے متبادل زاویئے اور نظیری زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔ (گزشتہ مسئلہ کی روسے) ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $\angle CAB = \angle ACE$ اور $\angle ABC = \angle DCE$

مرحلہ (4) : یہاں ہم $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ کو اخذ کرنے کے لیے ہم یوکلڈ کا موضوعہ استعمال کرتے ہیں جو بتاتا ہے کہ "اگر مساوی حسابی اجزاء، مساوی حسابی اجزاء میں جمع کیے جاتے ہیں تو وہ کل اجزاء کے مجموعے بھی مساوی ہوتے ہیں"۔

یعنی ایک مثلث کے تینوں داخلی زاویوں کا مجموعہ ایک خط مستقیم کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

مرحلہ (5) : یہاں اختتامی مرحلہ کے طور پر ہم یوکلڈ کا موضوعہ استعمال کرتے ہیں کہ "اجزاء جو یکساں اجزاء کے مساوی ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں"۔

لہٰذا $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$

اب ہمیں یہی ثابت کرنا تھا، مسئلہ 15.2 اور مسئلہ 15.3 کو بغیر تجزیہ کیے ثابت کیجیے۔

مسئلہ 15.5 : دو طاق طبعی اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے کہ x اور y کوئی دو طاق طبعی اعداد ہیں۔

ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ xy طاق ہے۔

کیوں کہ x اور y طاق ہیں، ان کو $x = (2m - 1)$ اور $y = 2n - 1$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے، کوئی طبعی عدد 'm' اور n کے لیے

تب $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$$= 4mn - 2m - 2n + 1$$

$$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$$

$$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$$

اوپر کی مساوات میں $2mn - m - n + 1 = l$ رکھیے۔ جہاں 'l' کوئی طبعی عدد ہے۔

$$= 2l - 1, l \in N$$

جو کہ ایک طاق عدد ہے۔

Theorem-15.6 : The product of any two consecutive even natural numbers is divisible by 4.

Any two consecutive even number will be of the form $2m$, $2m + 2$, for some natural number n. We have to prove that their product $2m\,(2m + 2)$ is divisible by 4. (Now try to prove this yourself).

We conclude this chapter with a few remarks on the difference between how mathematicians discover results and how formal rigorous proofs are written down. As mentioned above, each proof has a key intiative idea. Intution is central to a mathematicians' way of thinking and discovering results. A mathematician will often experiment with several routes of thought, logic and examples, before she/he can hit upon the correct solution or proof. It is only after the creative phase subsides that all the arguments are gathered together to form a proper proof.

We have discussed both inductive reasoning and deductive reasoning with some examples.

It is worth mentioning here that the great Indian mathematician Srinivasa Ramanujan used very high levels of intuition to arrive at many of his statements, whch he claimed were true. Many of these have turned out to be true and as well as known theorems.

Exercise - 15.4

1. State which of the following are mathematical statements and which are not? Give reason.
   i. She has blue eyes
   ii. $x + 7 = 18$
   iii. Today is not Sunday.
   iv. For each counting number x, $x + 0 = x$
   v. What time is it?
2. Find counter examples to disprove the following statements:
   i. Every rectangle is a square.
   ii. For any integers x and y, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   iii. If n is a whole number then $2n^2 + 11$ is a prime.
   iv. Two triangles are congruent if all their corresponding angles are equal.
   v. A quadrilateral with all sides are equal is a square.
3. Prove that the sum of two odd numbers is even.
4. Prove that the product of two even numbers is an even number.

مسئلہ 15.6 : کسی بھی دو متصلہ جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب 4 سے قابل تقسیم ہے۔

کوئی دو متصلہ جفت اعداد، چند طبعی اعداد n کے لیے $2m$، $2m + 2$ کی شکل میں ہوں گے۔ ہم کو ثابت کرنا ہے کہ $2m(2m+2)$، 4 سے قابل تقسیم ہے۔ (آپ از خود ثابت کرنے کی کوشش کیجیے)

ہم اس باب کو چند نکات پر یہ بتاتے ہوئے ختم کرتے ہیں کہ کس طرح ریاضی دانوں نے نتائج اخذ کیے اور کیسے غیر منظّم شدہ ثبوت کو با قاعدہ بنایا، جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے کہ ہر ثبوت کے لیے ایک کلیدی نظریہ ہوتا ہے۔ ایک ریاضی داں کشف اور اظہار کے وصف کا فطری رجحان رکھتا ہے اور اسی بنیاد پر وہ اپنی فکر، سوچ اور دلائل کے ذریعہ تجربات کرتا ہے، انہی کوششوں کے نتائج اسے بالآخر مسئلہ کے حل تک پہنچاتے ہیں۔ تخلیقی پہلوؤں کے دلائل کو یکجا کرنے کے بعد ہی ثبوت فراہم ہوتا ہے۔

ہم نے مثالوں کے ساتھ استخرائی استدلال اور استخراجی استدلال دونوں پر بحث کی۔

یہاں یہ بتانا بیجا نہ ہوگا کہ عظیم ہندوستانی ریاضی داں سرینواس راما نجن نے اپنے وجدانی وصف کا بہتر استعمال کرتے ہوئے اعداد سے متعلق مسئلے دنیا کو پیش کیے رامانجن کے متعدد نظریات صحیح ثابت ہوئے۔

مشق 15.4

1. بتلائیے کہ ذیل میں کون سے ریاضیاتی بیانات ہیں اور کون سے نہیں؟ وجہ بتلائیے۔

   (i) اس کی آنکھیں نیلی ہیں۔

   (ii) $x + 7 = 18$

   (iii) آج اتوار نہیں ہے۔

   (iv) ہر گنتی کے عدد x کے لیے $x + 0 = x$

   (v) اب کیا وقت ہو رہا ہے؟

2. ذیل کے بیانات کو غلط ثابت کرنے کے لیے مخالف مثالیں دیجیے۔

   (i) ہر مستطیل ایک مربع ہے۔

   (ii) کوئی صحیح اعداد x اور y کے لیے $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

   (iii) اگر n ایک مکمل عدد ہے تب $2n^2 + 11$ ایک مفرد ہے۔

   (iv) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے تمام متناظر زاویے مساوی ہوں۔

   (v) ایک چار ضلعی جس کے تمام ضلعے مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔

3. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

4. ثابت کیجئے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

5. Prove that if x is odd, then x^2 is also odd.

6. Examine why they work ?

   i. Choose a number. Double it. Add nine. Add your original number. Divide by three. Add four. Subtract your original number. Your result is seven.

   ii. Write down any three-digit number (for example, 425). Make a six-digit number by repeating these digits in the same order (425425). Your new number is divisible by 7, 11, and 13.

What We Have Discussed?

1. The sentences that can be judged on some criteria, no matter by what process for their being true or false are statements.
2. Mathematical statements are of a distinct nature from general statements. They can not be proved or justified by getting evidence while they can be disproved by finding a counter example.
3. Making mathematical statements through observing patterns and thinking of the rules that may define such patterns.

   A hypothesis is a statement of idea which gives an explanation to a sense of observation.
4. A process which can establish the truth of a mathematical statement based purely on logical arguments is called a mathematical proof.
5. Axioms are statements which are assumed to be true without proof.
6. A conjecture is a statement we believe is true based on our mathematical intution, but which we are yet to prove.
7. A mathematical statement whose truth has been established or proved is called a theorem.
8. The prime logical method in proving a mathematical statement is deductive reasoning.
9. A proof is made up of a successive sequence of mathematical statements.
10. Begining with given (Hypothesis) of the theorem and arrive at the conclusion by means of a chain of logical steps is mostly followed to prove theorems.
11. The proof in which, we start with the assumption contrary to the conclusion and arriving at a contradiction to the hypothesis is another way that we establish the original conclusion is true is another type of deductive reasoning.
12. The logical tool used in establishment the truth of an unambiguious statements to deductive reasoning.
13. The resoning which is based on examining of variety of cases or sets of data discovering pattern and forming conclusion is called Inductive reasoning.

.5 ثابت کیجیے کہ اگر x طاق ہے تب x^2 بھی طاق ہے۔

.6 جانچ کیجیے کہ وہ کس طرح کام کرتا ہے؟

(i) ایک عدد منتخب کیجیے' اس کو دوگنا کیجیے اس میں اپنا مفروضہ عدد کو جمع کیجیے۔ تین سے تقسیم کیجیے۔ 4 جمع کیجیے۔ اپنے عدد کو تفریق کیجیے۔ آپ کا نتیجہ 7 ہے۔

(ii) کوئی تین ہندسی عدد لکھیے (مثلاً 425) ان ہندسوں کو ایسی ہی ترتیب میں دہراتے ہوئے ایک چھ ہندسی عدد بنائیے۔ (425425) آپ کا نیا عدد 7' 11 اور 13 سے قابل تقسیم ہے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

.1 جملے جن کو کسی اصول پر جانچا جا سکتا ہو' بیانات کہلاتے ہیں۔ ان کے صحیح یا غلط ہونے کے معیار کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔

.2 ریاضیاتی بیانات' تمام بیانات سے مختلف ہوتے ہیں' انہیں ثبوت کے ذریعہ غلط ثابت کیا جا سکتا ہے۔

.3 بعض نمونوں کے مشاہدہ اور اصولوں کے لحاظ سے ریاضیاتی بیانات تشکیل دیے جاتے ہیں۔
مفروضہ وہ خیال ہے جو مشاہداتی حس کو بیان کرتا ہے۔

.4 وہ طریقہ جس کے ذریعہ استدلال کی بنیاد پر بیانات کی صداقت کو پیش کیا جاتا ہے 'ریاضیاتی ثبوت' کہلاتا ہے۔

.5 موضوعے وہ بیانات ہیں جو بغیر ثبوت کے بھی صحیح مانے جاتے ہیں۔

.6 مفروضہ وہ بیان ہے جسے ہم ریاضیاتی قیاس کی اساس پر صحیح سمجھتے ہیں لیکن ہم نے اسے ہنوز ثابت نہیں کیا ہے۔

.7 ''مسئلہ'' وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کی صداقت ثابت کی جا چکی ہے۔

.8 ایک ریاضیاتی بیان کو مفرد منطقی طریقہ سے ثابت کرنا استخراجی دلیل کہلاتی ہے۔

.9 ایک ثبوت ریاضیاتی بیانات کی سلسلہ وار ترتیب ہے۔

.10 مسئلہ کو ثابت کرنے کا طریقہ یہ ہے کہ کسی مسئلہ کے دیے ہوئے مفروضات سے شروع کرتے ہوئے مرحلہ بہ مرحلہ منطقی انداز میں ثبوت فراہم کیا جائے۔

.11 ثبوت ایسے بھی فراہم کیا جاتا ہے کہ جس میں مفروضات سے شروع کرتے ہوئے مطلوبہ نتیجہ کا تضادی نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ بھی استخراجی دلیل کا ایک اور انداز ہے۔ (یہ وہ طریقہ عمل ہے جس کے ذریعہ ہم مطلوبہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں)۔

.12 استخراجی استدلال واضح بیانات کی صداقت کو جانچنے کا ایک طریقہ ہے۔

.13 استخرائی دلیل مواد کی مختلف صورتوں یا سٹس کی جانچ کرنے' نمونوں کی ترتیب معلوم کرنے اور نتائج اخذ کرنے کے لیے کیا جانے والا طریقہ ہے۔

Answers

Exercise - 5.1

1. (i) Water Tank (ii) Mr. 'J' house
   (iii) In street-2, third house on right side while going in east direction.
   (iv) In street 4, first building on right side while going in east direction.
   (v) In street 4, the third building on left side while going in east direction

Exercise - 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3
   (v) Y-axis (vi) X-axis (vii) X-axis (viii) Y-axis
2. (i) abscissa : 4, ordinate : -8 (ii) abscissa : -5, ordinate : 3 (iii) abscissa : 0, ordinate : 0 (iv) abscissa : 5, ordinate : 0
   (v) abscissa : 0, ordinate : -8
3. (ii) (0, 13) : Y-axis (iv) (-2, 0) : X-axis
   (v) (0, -8) : Y-axis (vi) (7, 0) : X-axis
   (vii) (0, 0) : on both the axis.
4. (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
   (v) 4 (vi) -3
5. (i) False (ii) True (iii) True (iv) False (v) False (vi) False

Exercise - 5.3

2. No. (5, -8) lies in Q_4 and (-8, 5) lies in Q_2
3. All given points lie on a line parallel to Y-axis at a distance of 1 unit.
4. All points lie on a line parallel to X-axis at a distance of 4 units.
5. 12 Sq.units. 6. 8 Sq. units

جوابات

مشق 5.1

1. (i) پانی کی ٹانکی (ii) جناب 'J' کا مکان

(iii) اسٹریٹ (گلی) ۔ 2' مشرقی سمت میں جاتے وقت سیدھی جانب کا آخری مکان۔

(iv) اسٹریٹ (گلی) ۔ 4' مشرقی سمت میں جاتے وقت سیدھی جانب کی پہلی عمارت۔

(v) اسٹریٹ (گلی) ۔ 4' مشرقی سمت میں جاتے وقت دائیں جانب کی آخری عمارت۔

مشق 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3

(v) Y۔محور (vi) X۔محور (vii) X۔محور (viii) Y۔محور

1. (i) پہلا مختص یا فصلہ: 4 دوسرا مختص یا معین: -8 (ii) پہلا مختص یا فصلہ: -5 دوسرا مختص یا معین: 3 (iii) پہلا مختص یا فصلہ: 0 پہلا مختص یا معین: 0 (iv) پہلا مختص یا فصلہ: 5 دوسرا مختص یا معین: 0

(v) پہلا مختص یا فصلہ: 0 دوسرا مختص یا معین: -8

3. (ii) $(0, 13)$: Y۔محور (iv) $(-2, 0)$: X۔محور

(v) $(0, -8)$: Y۔محور (vi) $(7, 0)$: X۔محور

(vii) $(0, 0)$: مبداء

4. (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P

(v) 4 (vi) -3

5. (i) کاذب (ii) صادق (iii) صادق (iv) کاذب

(v) کاذب (vi) صادق

مشق 5.3

2. نہیں، $(5, -8)$ ربع Q_4 میں اور $(-8, 5)$ ربع Q_2 میں واقع ہے۔

3. دیئے گئے تمام نقاط Y۔محور کے متوازی خط پر واقع ہیں جو ایک اکائی کے فاصلے پر ہے۔

4. دیئے گئے تمام نقاط X۔محور کے متوازی خط پر واقع ہیں جو 4 اکائیوں کے فاصلے پر ہے۔

5. 12 مربع اکائیاں، 6. 6 مربع اکائیاں

Exercise - 7.4

6. 7

7. No.

Exercise - 8.1

1. (i) True (ii) True (iii) False (iv) True
   (v) False (vi) False
2. (a) Yes, No, No, No, No (b) No, Yes, Yes, Yes, Yes
   (c) No, Yes, Yes, Yes, Yes (d) No, Yes, Yes, Yes, Yes
   (e) No, Yes, Yes, Yes, Yes (f) No, Yes, Yes, Yes, Yes
   (g) No, No, No, Yes, Yes (h) No, No, Yes, No, Yes
   (i) No, No, No, Yes, Yes (j) No, No, Yes, No, Yes.
4. Four angles = 36°, 72°, 108°, 144°

Exercise - 8.3

1. Angles of parallelogram = 73°, 107°, 73°, 107°
2. Angles of parallelogram = 68°, 112°, 68°, 112°

Exercise - 8.4

1. BC = 8 cm.

Exercise - 11.1

1. 19.5 cm^2

2. 114 cm^2

3. 36 cm^2

Exercise - 11.2

1. 8.57 cm

2. 6.67 cm

مشق 7.4

.6 7   .7 نہیں

مشق 8.1

.1 (i) صادق   (ii) صادق   (iii) کاذب   (iv) صادق

(v) کاذب   (vi) کاذب

.2 (a) ہاں، نہیں، نہیں، نہیں، نہیں   (b) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں

(c) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں   (d) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں

(e) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں   (f) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں

(g) نہیں، نہیں، نہیں، ہاں، ہاں   (h) نہیں، نہیں، ہاں، نہیں، ہاں

(i) نہیں، نہیں، نہیں، ہاں، ہاں   (j) نہیں، نہیں، ہاں، نہیں، ہاں

.4 چارزاویے = 36°، 72°، 108°، 144°

مشق 8.3

.1 متوازی الاضلاع کے زاویے = 73°، 107°، 73°، 107°

.2 متوازی الاضلاع کے زاویے = 68°، 112°، 68°، 112°

مشق 8.4

.1 BC = 8 سینٹی میٹر

مشق 11.1

.1 19.5 cm^2 .2 114 cm^2 .3 36 cm^2

مشق 11.2

.1 8.57 cm   .2 6.67 cm

Exercise - 12.1

1. (i) Radius (ii) Diameter (iii) Minor arc
   (iv) Chord (v) Major arc (vi) Semi-circle
   (vii) Chord (viii) Minor segment
2. (i) True (ii) True (iii) True (iv) False
   (v) False (vi) True (vii) True

Exercise - 12.2

1. 90°
2. 48°, 84°
3. Yes

Exercise - 12.4

1. 130°
2. 40°
3. 60°, 120°
4. 5cm.
5. 6 cm.
6. 4 cm.
8. 70°, 55°, 55°

Exercise 12.5

1. (i) $x° = 75°$; $y° = 75°$ (ii) $x° = 70°$; $y° = 95°$
   (iii) $x° = 90°$; $y° = 40°$
5. (a), (b), (c), (e), (f) = Possible ; (d) = Not possible

Exercise - 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 and 6 (b) Yes (c) $\frac{1}{3}$
2. (a) $\frac{45}{100}$; $\frac{55}{100}$ (b) 1
3. (a) Red (b) Yellow (c) Blue and Green (d) No chance
   (e) No (It is random experiment)
4. (a) No.
   (b) P (green) = $\frac{5}{12}$; P (blue) = $\frac{1}{4}$; P (red) = $\frac{1}{6}$; P (yellow) = $\frac{1}{6}$

مشق 12.1

1. (i) نصف قطر (ii) قطر (iii) قوس اصغر
(iv) وتر (v) قوس اکبر (vi) نصف دائرہ
(vii) وتر (viii) قطعہ اصغر

2. (i) صادق (ii) صادق (iii) صادق (iv) کاذب
(v) کاذب (vi) صادق (vii) صادق

مشق 12.2

1. 90° 2. 48°, 84° 3. ہاں

مشق 12.4

1. 130° 2. 40° 3. 60°, 120° 4. 5 cm.
5. 6 cm. 6. 4 cm. 8. 70°, 55°, 55°

مشق 12.5

1. (i) $x° = 75°$; $y° = 75°$ (ii) $x° = 70°$; $y° = 95°$
(iii) $x° = 90°$; $y° = 40°$

5 ممکن ہے = (a), (b), (c), (e), (f) ; ممکن نہیں = (d)

مشق 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 (b) Yes (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{55}{100}$; $\frac{45}{100}$ (b) 1

3. (a) سرخ (b) زرد (c) اودا، سبز اور سرخ (d) کوئی امکان نہیں
(e) نہیں (یہ بلا منصوبہ تجربہ ہے)

4. (a) نہیں
(b) $\frac{5}{12}$ (سبز) = P ؛ $P(\text{اودا}) = \frac{1}{4}$ ؛ $P(\text{سرخ}) = \frac{1}{6}$ ؛ $P(\text{زرد}) = \frac{1}{6}$
(c) 1

5. (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. $P(E) = \frac{7}{11}$

7. (i) $P = \frac{61}{806}$ (ii) $P = \frac{45}{146}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$ 8. $\frac{3.43}{16}$

Exercise - 15.1

1. (i) Always false. There are minimum 28 days in a month. Usually we have months of 30 and 31 days.
   (ii) Ambiguous. In a given year, Makara Sankranthi may or may not fall on friday.
   (iii) Ambiguous. At some time in winter, there can be a possibility that Hyderabad have 2°C temperature.
   (iv) True, to the known fact, so far we can say this but it can be changed if scientists find evidances of life on other planets.
   (v) Always false. Dogs cannot fly.
   (vi) Ambiguous. In a leap year, February has 29 days.
2. (i) False, the sum of the interior angles of a quadrilateral is 360°.
   (ii) True - eg. all negative numbers.
   (iii) True- Rhombus has opposite side parallel to each other therefore rhombus is parallelogram.
   (iv) True
   (v) No, all square number can not be written as a sum of two odd numbers, eg. 9 = 4+5 (But we can write all square numbers as a sum of odd, eg. 9 = 1 + 3 + 5 numbers)
3. (i) Only natural number
   (ii) Two time a natural number is always even.

   [eg. $2 \times \frac{5}{2} = 5$ (odd number)]

   (iii) For any $x > 1$, $3x + 1 > 4$ (iv) For any $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$
   (v) In an equilateral triangle, a median is also an angle bisector.
4. Take any negative number $x = -2, y = -3$

   $-2 > -3$ (Given)

   $x^2 = -2 \times -2 = 4$ (here $x^2 < y^2$)

   $y^2 = -3 \times -3 = 9$

.5 (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

.6 $P(E) = \frac{7}{11}$

.7 (i) $P = \frac{61}{806}$ (ii) $P = \frac{45}{146}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$ (8) $\frac{3.43}{16}$

مشق 15.1

.1 (i) ہمیشہ کاذب ہوتا ہے۔ایک مہینے میں 27 دن ہوتے ہیں‘عام طور پر ہمارے پاس 30 اور 31 دنوں کے مہینے ہیں۔

(ii) مبہم۔دیئے گئے سال میں مکرسنکرانتی جمعہ کو بھی ہوسکتی ہے نہیں بھی۔

(iii) مبہم۔موسم سرما میں بعض وقت یہ ممکن ہوسکتا ہے کہ شہر حیدرآباد کا درجہ حرارت $2^{o}C$ تک پہنچ جائے۔

(iv) صادق۔ حقیقت کی روشنی میں‘بعد میں یہ کہہ سکتے ہیں مگر یہ بدل بھی سکتا ہے۔اگر سائنسداں دوسرے سیاروں پر حیات (زندگی) کے ثبوت تلاش کریں۔

(v) ہمیشہ کاذب ہوتا ہے۔کتے اُڑ نہیں سکتے۔

(vi) مبہم۔سال کبیسہ میں ماہ فروری کے 29 دن ہوتے ہیں۔

.2 (i) صادق۔چار ضلعی کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 360^{o} ہوتا ہے۔

(ii) کاذب۔مثال کے طور پر تمام منفی اعداد۔

(iii) صادق۔معین جس کے مقابل کے ضلعے متوازی ہیں۔لہٰذا یہ معین متوازی الاضلاع ہے۔

(iv) صادق

(v) نہیں۔تمام مربعوں کو دو طاق اعداد کے مجموعے کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا جیسے $9 = 4 + 5$

(مگر ہم تمام مربعوں کو طاق اعداد کے مجموعے کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جیسے $9 = 1 + 3 + 5$)

.3 (i) صرف طبعی عدد

(ii) کسی بھی طبعی عدد کا دگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔جیسے (جفت عدد) $2\times\frac{5}{2} = 10$

(iii) کسی کے لیے بھی $x > 1, 3x + 1 > 4$

(iv) کسی کے لیے بھی $x \geq 0,\ x^3 \geq 0$

(v) مثلث کے مساوی الاضلاع کا وسطانیہ اس کے زاویہ کا بھی ناصف ہوتا ہے۔

.4 کوئی منفی اعداد لیجیے۔

$x \quad y$

$-2 > -3$ (دیا گیا ہے)

یہاں $x^2 < y^2$

$x^2 = -2 \times -2 = 4$

$y^2 = -3 \times -3 = 9$

EXERCISE - 15.2

1. (i) Jeevan is mortal
   (ii) No, X could be any other state person lke marathi, gujarati, punjabi etc.
   (iii) Gulag has red tongue.
   (iv) All smarts need not be a president. Here we have given only that all presidents are smart. There could be some other people like some of the teachers, students who are smart too.
2. You need to turn over B and 8. If B has an even number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if 8 has a consonant on the other side, then the rule has been broken.
3. The answer is 35.

- Statement 'a' does not help because by following the other clues you can tell that you need more than on digit.
- Statement 'b' does not help because the one digit has to be larger than the tens-digit and the only multiple of 7 and 10 is 70 and 0 is smaller than the 7.
- Statement 'c' helps because being a multiple of 7 concels out a lot of numbers that could have been possibilities.
- Statement 'd' helps because being an odd number it too ancels out a lot of other possibilities.
- Statement 'e' does not help because the only multiple of 7 and 11 is 77 and the ones digit has to bigger than the tens digit.
- Statement 'f' does not help.
- Statement 'g' helps because by using it there will be few numbers left.
- Statement 'h' helps by using it only 35 remains.

So - 3, 4, 7 and 8 helps and they only are enough to get the number.

EXERCISE - 15.3

1. (i) The possible three conjuctures are:
   a) The product of any three consecutive odd number is odd.
   b) The product of any three consecutive odd number is divisible by 3.
   c) The sum of all the digits present in product of three consecutive odd numbers is even.
   (ii) The possible three conjuctures are:
   a) The sum of any three consecutive number is always even.
   b) The sum of any three consecutive number is always divided by 3.
   c) The sum of any three consecutive number is always divided by 6.

مشق 15.2

1. (i) جاوید فانی ہے۔

(ii) نہیں، X کسی بھی دوسری ریاست جیسے مراٹھی، گجراتی، پنجابی وغیرہ کا ہوسکتا ہے۔

(iii) رحیم کی زبان لال ہے۔

(iv) تمام ذہین لوگ صدر بنا ضروری نہیں ہے۔ہم نے یہاں یہ بتلایا کہ صدر ذہین ہوتے ہیں۔مگر یہاں دوسرے اور بھی لوگ ہوتے ہیں جیسے اساتذہ، طلبا جوان سے بھی زیادہ ذہین ہوتے ہیں۔

2. یہاں B اور 8 کو الٹا کرنے کی ضرورت ہے۔دوسری جانب اگر 8 ایک جفت عدد ہے تب اصول ٹوٹ جاتا ہے۔اسی طرح اگر 8 دوسری جانب حروف سہی ہے تب بھی اصول ٹوٹ جاتا ہے۔

3. جواب 35 ہے۔

- یہاں 'a' مدد نہیں کرسکتا کیونکہ دوسرے اشارات کو ملحوظ رکھا جائے تو آپ یہ کہہ سکتے ہیں آپ کو ایک سے زائد ہندسے کی ضرورت ہے۔
- بیان 'b' مدد نہیں کرسکتا کیوں کہ اکائی کا ہندسہ، دہائی کے ہندسے سے بڑا ہونا چاہیے۔
  7 اور 10 کا ضعف 70 ہے اور 0 ، 7 سے چھوٹا ہے۔
- بیان 'c' مدد کرتا ہے کیونکہ 7 کے اضعاف ہونے کی صورت میں زیادہ سے زیادہ اعداد کا امکان ہے۔
- بیان 'd' مدد کرتا ہے کیونکہ طاق عدد کی صورت میں دوسرے ممکنات کو بڑھاوا دے سکتے ہیں۔
- بیان 'e' مدد نہیں کرتا کیونکہ 7 اور 11 کا ضعف 77 ہے۔اکائی کے ہندسہ کو دہائی کے ہندسے سے بڑا ہونا چاہیے۔
- بیان 'f' مدد نہیں کرسکتا۔
- بیان 'g' مدد کرتا ہے اگر اس کو استعمال کیا جائے تو چند اعداد بچ جاتے ہیں۔
- بیان 'h' مدد کرتا ہے اگر اس کو استعمال کیا جائے تو 35 بچتا ہے۔اس طرح 3، 4، 7 اور 8 عدد کو حاصل کرنے کے لیے یہ کافی ہیں۔

مشق 15.3

1. (i) تین ممکنہ اتفاقات (قیاس)

(a) کوئی تین متوازی طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

(b) کوئی تین متوازی طاق اعداد کا حاصل ضرب 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

(c) تین متواتر طاق اعداد کے حاصل ضرب میں موجود تمام ہندسوں کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

(ii) تین ممکنہ اتفاقات (قیاس)

(a) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔

(b) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 3 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

(c) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 6 سے بھی قابل تقسیم ہوتا ہے۔

4. $111111^2 = 12345654321$ $\qquad$ $1111111^2 = 1234567654321$

   Conjecture is true

6. Conjecture is false because you can not find a composite number for $x = 41$.

Exercise - 15.4

1. (i) No (ii) Yes (iii) No

   (iv) Yes (v) No

2. (i) A rectangle has equal angles but may not be a square.

   (ii) For $x = 2; y = 3$, the statement is not true.
   (It is only true for $x = 0; y = 1$ or $x = 0, y = 0$)

   (iii) For $n = 11$, $2n^2 + 11 = 253$ which is not a prime number.

   (iv) You can give any two triangles with the same angles but of different sides.

   (v) A rhombus has equal sides but may not be a square.

3. Let x and y be two odd numbers. Then $x = 2m + 1$ for some natural number m and $y = 2n + 1$ for some natural number n.

   $x + y = 2\,(m + n + 1)$. Therefore, $x + y$ is divisible by 2 and is even.

4. Let $x = 2m$ and $y = 2n$

   Product $xy = (2m)\,(2n)$

   $= 4\,mn$

6. (i) Let your original number be n. Then we are doing the following operations:

$$n \to 2n \to 2n+9 \to +n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$

   (ii) Note that $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Take any three digit number say, *abc*. Then abc $\times$ 1001 = *abcabc*. Therefore, the six digit number *abcabc* is divisible by 7, 11 and 13.

4. $111111^2 = 12345654321$ $\quad 1111111^2 = 1234567654321$

تخمینہ صادق ہے۔

6. اندازہ (تخمینہ) کاذب ہے کیونکہ $x = 41$ کے لیے ہم مرکب عدد معلوم نہیں کرسکتے۔

مشق 15.4

1. (i) نہیں (ii) ہاں (iii) نہیں
(iv) ہاں (v) نہیں

2. (i) اگر ایک مستطیل کے زاویے مساوی ہیں تب وہ مربع نہیں ہوسکتا۔
(ii) $x = 2$، $y = 3$ کے لیے بیان صادق نہیں ہے۔
(یہ صرف $x = 0$، $y = 1$ یا $x = 0$ ، $y = 0$ کے لیے صادق ہے)
(iii) $n = 11$ کے لیے $2n2 + 11 = 53$ جو مفرد عدد نہیں ہے۔
(iv) آپ کوئی دو مثلثات بناسکتے ہیں جن کے زاویے مساوی ہیں مگر اضلاع مختلف ہیں۔
(v) اگر ایک معین کے اضلاع مساوی ہیں مگر وہ ایک مربع نہیں ہوسکتا۔

3. مان لیجیے کہ X اور Y دو طاق اعداد ہیں تب چند طبعی اعداد m کے لیے $X = 2m + 1$ ، چند طبعی اعداد n کے لیے $Y = 2n + 1$

$x + y = 2 (m + n + 1)$

لہٰذا $x + y$، 2 سے تقسیم پذیر ہے اور جفت ہے۔

4. مان لیجیے کہ $X = 2m$ اور $Y = 2m$

حاصل ضرب $xy = (2m) (2m)$

$= 4mn$

6. (i) مان لیجیے کہ آپ کا اصلی عدد n ہے۔ ذیل میں ہم چند اعمال انجام دے رہے ہیں۔

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow +n = 3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n+3 \rightarrow n+3+4 = n+7 \rightarrow n+7-n = 7$$

(ii) نوٹ کیجیے کہ $7 \times 11 \times 13 = 1001$ کوئی تین ہندسی عدد لیجیے۔

جیسے abc تب $abc \times 1001 = abcabc$

لہٰذا چھ ہندسی عدد abc abc، 7 ، 11 اور 13 قابل تقسیم ہے۔

SYLLABUS

Number System (10 hrs) **(i) Real numbers**	**(i) Real numbers** • Review of representation of natural numbers, integers, and rational numbers on the number line. • Representation of terminating / non terminating re curring decimals, on the number line through successive magnification. • Rational numbers as recurring / terminating decimals. • Finding the square root of $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ correct to 6-decimal places by division method • Examples of nonrecurring / non terminating decimals such as 1.01011011101111— 1.12112111211112— and $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc. • Existence of non-rational numbers (irrational numbers) such as $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and their representation on the number line. • Existence of each real number on a number line by using Pythogorian result. • Concept of a Surd. • Rationalisation of surds • Square root of a surd of the form $a+\sqrt{b}$
Algebra (20 hrs) **(i) Polynomials** **(ii) Linear Equations in Two Variables.**	**(i) Polynomials** • Definition of a polynomial in one variable, its coefficients, with examples and counter examples, its terms, zero polynomial. • Constant, linear, quadratic, cubic polynomials; monomials, binomials, trinomials. Zero / roots of a polynomial / equation. • State and motivate the Remainder Theorem with examples and analogy to positive integers (motivate). • Statement and verification of the Factor Theorem. Factorization of $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ where a, b, c are real numbers and factorization of cubic polynomials using the Factor Theorem.

نصاب

اعدادکانظام (50 گھنٹے) (i) حقیقی اعداد	**(i) حقیقی اعداد** • عددی خط پر طبعی اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے اظہار کا اعادہ۔ • مسلسل کلاں نما کے ذریعہ عددی خط پر مختتم / غیر مختتم اعشاریہ کا اظہار۔ • حقیقی اعداد بطور متوالی / مختتم اعشاریہ۔ • تقسیمی طریقے کے ذریعہ $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ کا 6 صحیح اعشاریائی مقام تک جذرالمربع معلوم کرنا • غیر متوالی / غیر مختتم اعشاریہ کی مثالیں جیسے۔ 1.01011011101111....... 1.12112111211112....... اور $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ وغیرہ۔ • غیر ناطق اعداد کا وجود جیسے $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ اور ان کا عددی خط پر اظہار۔ • فیثا غورث نتیجہ کی مدد سے عددی خط پر ہر ایک حقیقی عدد کے وجود کو بتلانا۔ • اصم کا تصور۔ • اصم کو نطقانا۔
الجبراء (20 گھنٹے) (i) کثیر رکنیاں (ii) دو متغیرات میں خطی مساوات	**(i) کثیر رکنیاں** • ایک متغیر میں کثیر رکنی کی تعریف اس کا عددی ضریب مثالوں اور متضاد مثالوں کے ذریعہ سے اس کے ارکان اور کثیر رکنی کا صفر۔ • مستقل، خطی، دودرجی، مکعبی کثیر رکنیاں، یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی، کثیر رکنیوں کے صفر / ریشے / مساوات۔ • مثبت صحیح اعداد کے مثالوں کے ذریعہ مسئلہ باقی کو بیان کیجیے اور محرک بنائیے۔ • جزو ضربی کے مسائل کو بیان کیجیے اور اس کی تصدیق کیجیے۔ $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنا جہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ جزو ضربی کے مسئلہ کی مدد سے کثیر رکنیوں کا مکعب معلوم کرنا۔

	• Recall of algebraic expressions and identities. • Further identities of the type: $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ $(x \pm y)^3 \equiv x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ and their use in factorization of polynomials. **(ii) Linear Equations in Two Variables** • Recall of linear equations in one variable. • Introduction to the equation in two variables. • Solution of a linear equation in two variables • Graph of a linear equation in two variables. • Equations of lines parallel to x-axis and y-axis. • Equations of x-axis and y-axis.
Coordinate geometry **(5 hrs)**	**Coordinate geometry** • Cartesian system • Plotting a point in a plane if its co-ordinates are given.
Geometry (40 hrs) **(i) The Elements of Geometry** **(ii) Lines and Angles** **(iii) Triangles** **(iv) Quadrilaterals** **(v) Area** **(vi) Circles** **(vii) Geometrical Constructions**	**(i) The Elements of Geometry** • History – Euclid and geometry in India. Euclid's method of formalizing observed phenomenon onto rigorous mathematics with definitions, common / obvious notions, axioms / postulates, and theorems. The five postulates of Euclid. Equivalent varies of the fifth postulate. Showing the relationship between axiom and theorem. • Given two distinct points, there exists one and only one line through them. • (Prove) Two distinct lines cannot have more than one point in common.

	• الجبرائی عبارتوں اور اکائیوں کا اعادہ • اکائیوں کے اقسام۔ $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3 - 3xyz = (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3+y^3 = (x+y)\,(x^2-xy+y^2)$ $x^3-y^3 = (x-y)\,(x^2-xy+y^2)$ اور کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی میں ان کا استعمال **(ii) دو متغیرات میں خطی مساواتیں** • ایک متغیر میں خطی مساواتوں کا اعادہ۔ • دو متغیرات میں مساوات کا تعارف۔ • دو متغیرات میں ایک خطی مساوات کا حل۔ • دو متغیرات میں ایک خطی مساوات کی ترسیم۔ • x۔محور اور y۔محور کے متوازی خطوط کی مساوات • x۔محور اور y۔محور کی مساواتیں۔
تحلیلی جیومٹری (5 گھنٹے)	**مختصات کی جیومٹری (تحلیلی جیومٹری)** • کارتیزی نظام (Cantesian system) • اگر مختصات دیئے جائیں تو مستوی میں نقطہ کو درج کرنا۔
جیومٹری (40 گھنٹے) **(i) جیومٹری کے عناصر** **(ii) خطوط اور زاویے** **(iii) مثلثات** **(iv) چار ضلعی** **(v) رقبہ** **(vi) دائرے** **(vii) جیومٹری بناوٹیں**	**(i) جیومٹری کے عناصر** • تاریخ ۔ اقلیدس اور ہندوستان میں جیومٹری مسئلے، مفروضات / قوانین واضح تصورات / مشترک خیالات، تعریفات سے سخت ریاضی کے مشاہدات کی اقلیدس کے طریقے سے ضابطہ سازی کرنا اقلیدس کے پانچ مفروضات۔ معادل، پانچویں مفروضے سے الگ ہوتا ہے۔ مسئلے اور معروضات کے درمیان رشتہ کو بتلانا۔ • دیئے گئے دو مختلف نقاط سے صرف ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے۔ • (ثبوت) دو مختلف خطوط ایک سے زائد مشترک نقطہ نہیں رکھتے۔

(ii) Lines and Angles

- (Motivate) If a ray stands on a line, then the sum of the two adjacent angles so formed is 180^0 and the converse.
- (Prove) If two lines intersect, the vertically opposite angles are equal.
- (Motivate) Results on corresponding angles, alternate angles, interior angles when a transversal intersects two parallel lines.
- (Motivate) Lines, which are parallel to given line, are parallel.
- (Prove) The sum of the angles of a triangle is 180^0.
- (Motivate) If a side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of the two interior opposite angles.

(iii) Triangles

- (Motivate) Two triangles are congruent if any two sides and the included angle of one triangle is equal to any two sides and the included angle of the other triangle (SAS Congruence).
- (Prove) Two triangles are congruent if any two angles and the included side of one triangle is equal to any two angles and the included side of the other triangle (ASA Congruence).
- (Motivate) Two triangles are congruent if the three sides of one triangle are equal to three sides of the other triangle (SSS Congruence).
- (Motivate) Two right triangles are congruent if the hypotenuse and a side of one triangle are equal respectively to the hypotenuse and a side of the other triangle.
- (Prove) The angles opposite to equal sides of a triangle are equal.
- (Motivate) The sides opposite to equal angles of a triangle are equal.
- (Motivate) Triangle inequalities and relation between 'angle and facing side'; inequalities in a triangle.

(ii) **خطوط اور زاویے**

- (محرک) اگر ایک خط پر ایک شعاع واقع ہوجائے تو دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے اور اس کا برعکس۔
- (ثبوت) دو مختلف خطوط ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) جب دو متوازی خطوط کو ایک قاطع خط قطع کرے تب اس کے داخلی زاویے، متبادل زاویے نظیری زاویے کے نتائج۔
- (محرک) خطوط جو دیئے گئے خط کے متوازی ہیں وہ بھی متوازی ہیں۔
- (ثبوت) مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔
- (ثبوت) ایک مثلث کے ایک ضلع کو آگے بڑھایا جائے تو خارجی زاویہ بنتا ہے، جو مقابل کے داخلی زاویوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

(iii) **مثلثات**

- (محرک) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں، اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ایک مشمولہ زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعے اور اس کے مشمولہ زاویے کے مساوی ہیں۔ (SAS متماثلت)
- (ثبوت) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور مشمولہ ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویے اور مشمولہ ضلع کے مساوی ہیں۔ (ASA متماثلت)
- (محرک) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے تینوں ضلعے دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے مساوی ہیں۔ (SSS متماثلت)
- (محرک) دو قائم الزاویہ مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ضلع بالترتیب دوسرے مثلث کے وتر اور ضلع کے مساوی ہیں۔
- (ثبوت) ایک مثلث کے مساوی اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) ایک مثلث کے مساوی زاویوں کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) غیر مساوی مثلث یا زاویہ اور سطحی ضلع کے درمیان رشتہ، غیر مساوی مثلثات۔

(iv) Quadrilaterals

- (Prove) The diagonal divides a parallelogram into two congruent triangles.
- (Motivate) In a parallelogram opposite sides are equal and conversely.
- (Motivate) In a parallelogram opposite angles are equal and conversely.
- (Motivate) A quadrilateral is a parallelogram if one pair of its opposite sides are parallel and equal.
- (Motivate) In a parallelogram, the diagonals bisect each other and conversely.
- (Motivate) In a triangle, the line segment joining the mid points of any two sides is parallel to the third side and (motivate) its converse.

(v) Area

- Review concept of area, area of planar regions.
- Recall area of a rectangle.
- Figures on the same base and between the same parallels.
- (Prove) Parallelograms on the same base and between the same parallels have the same area.
- (Motivate) Triangles on the same base and between the same parallels are equal in area and its converse.

(vi) Circles

- Through examples, arrive at definitions of circle related concepts radius, circumference, diameter, chord, angle subtended by arc.
- (Prove) Equal chords of a circle subtend equal angles at the centre and (motivate) its converse.
- (Motivate) The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord and conversely, the line drawn through the centre of circle to bisect a chord is perpendicular to the chord.

(iv) چار ضلعی

- (ثبوت) ایک متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔
- (محرک) ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔
- (محرک) ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔
- (محرک) ایک چار ضلعی، متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر اس کے مقابل کے اضلاع کا ایک جوڑ متوازی اور مساوی ہو۔
- (محرک) ایک متوازی الاضلاع میں اس کے وتر ایک دوسرے کی تصنیف کرتے ہیں اور برعکس۔
- (محرک) ایک مثلث میں، خطی قطعہ اس کے کوئی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملاتا ہے، وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور برعکس۔

(v) رقبہ

- مستوی علاقوں کا رقبہ، رقبہ کے تصور کا اعادہ۔
- مستطیل کا رقبہ۔
- اشکال جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنائے جاتے ہیں۔
- (ثبوت) متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان پائے جاتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) مثلثات جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنائے جاتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔

(vi) دائرے

- مثالوں کے ذریعہ دائرے کی تعریف کرنا اور اس سے متعلقہ تصورات جیسے نصف قطر، محیط، قطر، وتر، قوس، زاویہ مقابلہ (قوس سے بننے والا زاویہ) کی بہتر تشریح۔
- (ثبوت) ایک دائرے کے مساوی وتر اس کے مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں اور (محرک) اس کے برعکس۔
- (محرک) ایک دائرے کے مرکز سے اس کے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔ اور اس کا برعکس اگر ایک خط وتر کی تنصیف کرتا ہے وہ وتر پر عمود وار بھی ہوتا ہے۔

	• (Motivate) There is one and only one circle passing through three given non-collinear points. • (Motivate) Equal chords of a circle (or of congruent circles) are equidistant from the centre (s) and conversely. • (Prove) The angle subtended by am arc at the centre is double the angle subtended by it at any point on the remaining part of the circle. • (Motivate) Angles in the same segment of a circle are equal. • (Motivate) A line segment joining any two points subtends equal angles at two other points lying on the same side of it then the four points are concyclic. • (Motivate) The sum of the either pair of the opposite angles of a cyclic quadrilateral is 180^0 and its converse.
	(vii) Geometrical Constructions • Construction of a triangle given its base, sum / difference of the other two sides and one base angles. • Construction of a triangle when its perimeter and base angles are given. • Construct a circle segment containing given chord and given an angle.
Mensuration (15 hrs) **(i) Surface Areas and Volumes**	**(i) Surface Areas and Volumes** • Revision of surface area and volume of cube, cuboid. • Surface areas of cylinder, cone, sphere, hemi sphere. • Volume of cylinder, cone, sphere. (including hemi spheres) and right circular cylinders/ cones.
Statistics and Probability (15 hrs) **(i) Statistics** **(ii) Probability**	**(i) Statistics** • Revision of ungrouped and grouped frequency distributions. • Mean, Median and Mode of ungrouped frequency distribution (weighted scores).
	(ii) Probability • Feel of probability using data through experiments. Notion of chance in events like tossing coins, dice etc. • Tabulating and counting occurrences of 1 through 6 in a number of throws.

	• (محرک) دیے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گزرتا ہے۔ • (محرک) ایک دائرے کے مساوی وتر (متماثل دائروں کے) مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں اور اس کے برعکس۔ • (ثبوت) دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ، دائرے کے باقی حصّے کی کسی نقطے پر بننے والے زاویہ کا دگنا ہوتا ہے۔ • (محرک) دائرے کے ایک ہی قطعہ کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔ • (محرک) کوئی دو نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ مساوی زاویئے بناتا ہے اس کے ایک ہی جانب واقع دو نقاط پر اس طرح اس کے چار نقاط ہم دائروی ہوتے ہیں۔ • (محرک) ایک دائری چار ضلعی کے مقابل کے زاویئوں کی جوڑی کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے اور اس کے برعکس۔
	(vii) بناوٹیں • مثلث بنانا جب کہ اس کا قاعدہ/اس کے دو اضلاع کا مجموعہ یا فرق اور قاعدے کا زاویہ دیا گیا ہو۔ • مثلث بنانا جب کہ اس کا احاطہ اور قاعدے کے زاویئے دیے گئے ہوں۔ • ایک دائری قطعہ بنانا جب کہ وتر اور زاویہ دیا گیا ہو۔
مساحت (15 گھنٹے) **(i) سطحی رقبہ اور حجم**	**(i) سطحی رقبہ اور حجم** • مکعب اور مکعب نما کا سطحی رقبہ اور حجم کا اعادہ۔ • استوانہ، مخروط، کرہ اور نیم کرہ کا سطحی رقبہ۔ • استوانہ، مخروط، کرہ، قائم دائری استوانے اور مخروط کا حجم۔
شماریات اور قیاسیت (15 گھنٹے) **(i) شماریات** **(ii) قیاسیات**	**(i) شماریات** • گروہی اور غیر گروہی تقسیمی تعددی کا اعادہ۔ • غیر گروہی تقسیمی تعددی کا اوسط، وسطانیہ اور بہتانیہ۔ **(ii) قیاسیات** • قیاسیات کو محسوس کرانا معطیات کو استعمال کرتے ہوئے تجربات کے ذریعہ۔ سکہ ڈائس (پانسہ) وغیرہ کو اچھالتے وقت واضح اندازہ لگانا۔ • پھینکنے کی تعداد میں 6 میں سے ایک وقوع پذیر ہونے والے واقعات کی گنتی اور جدول کی ترتیب۔

	• Comparing the observation with that for a coin. Observing strings of throws, notion of randomness. • Consolidating and generalizing the notion of chance in eventslike tossing coins, dice etc. • Visual representation of frequency outcomes of repeated throws of the same kind of coins or dice. • Throwing a large number of identical dice/coins together and aggregating the result of the throws to get large number of individual events. • Observing the aggregating numbers over a large number of repeated events.Comparing with the data fora coin. Observing strings of throws, notion of randomness.
Proofs in Mathematics (5 hrs) **(i) Proofs in Mathematics**	**(i) Proofs in Mathematics** • Mathematical statements, verifying them. • Reasoning Mathematics, deductive reasoning • Theorems, conjectures and axioms. • What is a mathematical proof.

	• سکہ کے مشاہدات کا تقابل، اسی کو اچھالنے کا مشاہدہ، سرسری قیاس۔ • سکہ اور پانسہ وغیرہ کو اچھالتے وقت ممکنہ قیاس کو یکجا کرنا اور ان میں عمومیت پیدا کرنا۔ • ایک جیسے سکے یا پانسہ کو اچھالتے وقت متعدد مرتب آنے والے نتائج کا بصارتی اظہار۔ • زیادہ تعداد میں ایک جیسے سکوں اور پانسہ کو اچھالتے وقت اور پھینکے جانے والے نتائج کو اکٹھا کرنا تا کہ، زیادہ تعداد میں انفرادی واقعات حاصل ہوں۔ • دہرائے گئے واقعات کی زیادی تعداد پر اکھٹا کیے جانے والے اعداد کا مشاہدہ کرنا۔ ایک سکہ کے لیے معطیات سے تقابل اس کو اچھالنے کا مشاہدہ، سرسری قیاس۔
ذیلی مواد/ضمیمہ (5 گھنٹے) **(i) ریاضی میں ثبوت**	**(i) ریاضی میں ثبوت (استدلال)** • ریاضیاتی بیانات اور ان کی تصدیق • ریاضیاتی وجوہات، استخراجی وجوہات • مسئلے مفروضات اور کلیات • ریاضیاتی استدلال کیا ہے؟

Academic Standards

Academic standards are clear statements about what students must know and be able to do. The following are categories on the basis of which we lay down academic standards

Problem Solving

Using concepts and procedures to solve mathematical problems

(a) Kinds of problems:

Problems can take various forms- puzzles, word problems, pictorial problems, procedural problems, reading data, tables, graphs etc.

(b) Problem Solving - steps

- Reads problems
- Identifies all pieces of information/data
- Separates relevant pieces of information
- Understanding what concept is involved
- Recalling of (synthesis of) concerned procedures, formulae etc.
- Selection of procedure
- Solving the problem
- Verification of answers using theorems, problems based on theorems.

(c) Complexity:

The complexity of a problem is dependent on the following

- Making connections (as defined in the connections section)
- Number of steps in the problem
- Number of operations in the problem
- Context unraveling
- Nature of procedures

Reasoning Proof

- Reasoning between various steps
- Understanding and making mathematical generalizations and conjectures
- Understands and justifies procedures· Examining logical arguments.

تعلیمی معیارات

طلباء کیا جاننا چاہیے اوران پرعمل کرنے کے قابل ہوں ان کے بارے میں تعلیمی معیارات واضح بیانات ہوتے ہیں؛ ان کی بنیاد پر ذیل کے تعلیمی معیارات کی درجہ بندی کی گئی ہے۔

مسئلہ کا حل

طریقۂ عمل اور تصورات کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی مسائل کو حل کرنا۔

(a) مسائل کے اقسام

مسائل مختلف صورتوں میں ہو سکتے ہیں؛ جیسے معمہ؛ عبارتی سوالات؛ تصویری مسائل طریقوں پر مبنی سوالات؛ معطیات؛ جدول اور ترسیمات وغیرہ۔

(b) مسئلہ کو حل کرنا

- مسئلہ کو پڑھنا۔
- معلومات/ڈیٹا کے تمام حصوں کی شناخت کرنا۔
- کونسا خیال یا تصور شامل ہے اس کی تفہیم کرنا۔
- متعلقہ طریقہ اعمال (مفروضات) ضابطوں وغیرہ کو دہرانا۔
- طریقۂ عمل کا انتخاب۔
- مسئلہ کو حل کرنا۔
- مسئلہ پر مبنی عبارتی سوالات اوران کے جوابات کی جانچ۔

(c) پیچیدگی

- ایک سوال کی پیچیدگی اس پر منحصر ہوتی ہے۔
- تعلق پیدا کرنا (ربط کے سیکشن میں اس کی تعریف کی گئی ہے)۔
- اقدامات کی تعداد۔
- مراحل کی تعداد۔
- عبارتی سوالات کو سلجھانا۔
- طریقۂ عمل کی نوعیت۔

استدلالی ثبوت

- مختلف مراحل کے درمیان وجوہات بتلانا (مختلف مفروضات سے)
- ریاضیاتی کلیات (ضابطے) اور مفروضات کو بتانا اور سمجھنا۔

- Understanding the notion of proof
- Uses inductive and deductive logic
- Testing mathematical conjectures

Communication

- Writing and reading, expressing mathematical notations (verbal and symbolic forms)

  Ex: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, Sum of angles $= 180^0$
- Creating mathematical expressions
- Explaining mathematical ideas in her own words like- a square is closed figure having four equal sides and all equal angles
- Explaining mathematical procedures like adding two digit numbers involves first adding the digits in the units place and then adding the digits at the tens place/ keeping in mind carry over.
- Explaining mathematical logic

Connections

- Connecting concepts within a mathematical domain- for example relating adding to multiplication, parts of a whole to a ratio, to division. Patterns and symmetry, measurements and space
- Making connections with daily life
- Connecting mathematics to different subjects
- Connecting concepts of different mathematical domains like data handling and arithmetic or arithmetic and space
- Connecting concepts to multiple procedures

Visualization & Representation

- Interprets and reads data in a table, number line, pictograph, bar graph, 2-D figures, 3-D figures, pictures
- Making tables, number line, pictograph, bar graph, pictures.
- Mathematical symbols and figures.

- طریقۂ عمل کی جانچ اور تفہیم، منطقی بحث کی جانچ۔
- تصور سے ثبوت کے مفہوم کو سمجھنا
- طریقۂ حوصلہ افزائی اور کٹوتی کا استعمال
- ریاضیاتی مفروضات کی جانچ

اظہار

- ریاضی کے اعداد کے نظام کو لکھنا، پڑھنا اور ان کا اظہار کرنا۔ (عباری اور علامتی شکل میں)

مثلاً 180^0 = زاویوں کا مجموعہ $3 + 4 = 7, 3 < 5, n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

- ریاضیاتی عبارتوں کی تشکیل
- ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں بیان کرنا جیسے مربع ایک بند شکل ہوتی ہے جس کے چار ضلع اور چار زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔
- ریاضیاتی طریقوں کی تشریح جیسے دو ہندسی اعداد کی جمع میں پہلے اکائی کے مقام کے ہندسوں کو جمع کرنا اس کے بعد دہائی کے مقام کے ہندسوں کو ہمیشہ حاصل کو مدنظر رکھتے ہوئے۔
- ریاضیاتی منطق کی تشریح

ربط

- ریاضیاتی علاقے کے تصورات میں ربط پیدا کرنا مثلاً جمع کو ضرب سے، کل کے حصوں کو نسبت سے تقسیم سے، نقش و نگار نمونے میں اور تشاکل، پیمائشات اور فاصلے۔
- روزمرہ زندگی سے تعلق پیدا کرنا۔
- ریاضی سے دوسرے مضامین میں ربط پیدا کرنا۔
- مختلف ریاضیاتی (domains) علاقوں کے تصورات میں ربط پیدا کرنا جیسے معطیات کا اظہار اور حساب یا حساب اور فضاء۔
- تصورات کو مختلف طریقوں سے جوڑنا / مربوط کرنا۔

نمائندگی

- جدول کے معطیات، عددی خط، تصویری ترسیم، بار گراف، 2D اشکال 3D اشکال، تصویروں اور خاکوں کو پڑھنا اور ان کی تشریح کرنا۔
- جدول، عددی خط، تصویری گراف، بار گراف اور تصویروں کو بتانا۔
- ریاضیاتی علامتیں اور اشکال۔

LEARNING OUTCOMES

The learner

- applies logical reasoning in classifying real numbers, proving their properties and using them in different situations.
- identifies/ classifies polynomials among algebraic expressions and factorises them by applying appropriate algebraic identities.
- relates the algebraic and graphical representations of a linear equation in one or two variables and applies the concept to daily life situations.
- identifies similarities and differences among different geometrical shapes.
- derives proofs of mathematical statements particularly related to geometrical concepts, like parallel lines, triangles, quadrilaterals, circles etc., by applying axiomatic approach and solves problems using them.
- finds areas of all types of triangles by using appropriate formulae and apply them in real life situations.
- constructs different geometrical shapes like bisectors of line segments, angles and triangles under given conditions and provides reasons for the processes of such constructions.
- develops strategies to locate points in a Cartesian plane.
- identifies and classifies the daily life situations in which mean, median and mode can be used.
- analyses data by representing it in different forms like, tabular form (grouped or ungrouped), bar graph, histogram (with equal and varying width and length), and frequency polygon, frequency curve and ogive curves
- calculates empirical probability through experiments and describes its use in words.
- derives formulae for surface areas and volumes of different solid objects like, cubes, cuboids, right circular cylinders/ cones, spheres and hemispheres and applies them to objects found in the surroundings.
- solves problems that are not in the familiar context of the child using above learning. These problems should include the situations to which the child is not exposed earlier.

آموزشی ماحاصل برائے مضمون ریاضی

جماعت نہم (اُردو)

Learning Outcomes for IX Class Mathematics

طلبا.........

☆ حقیقی اعداد کی درجہ بندی اور ان کی خصوصیات ثابت کرنے کے لیے استدلالی وجوہات استعمال کریں گے اور مختلف مواقعوں پر ان کو استعمال کریں گے۔

☆ الجبرائی عبارتوں میں کثیر رکنیوں کی شناخت/ درجہ بندی کریں گے اور موزوں الجبرائی متماثلات کے استعمال سے ان کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

☆ ایک متغیر اور دو متغیرات میں خطی مساوات کے الجبرائی اور ترسیمی اظہار کے درمیان رشتہ قائم کریں گے۔ اور اس تصور کو روزمرہ زندگی میں استعمال کریں گے۔

☆ مختلف جیومٹریائی اشکال کے درمیان پائے جانے والے مشابہت اور فرق کی شناخت کریں گے۔

☆ جیومیٹریائی تصورات پر مبنی مسلمہ حکمت عملی کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی بیانات کے ثبوت اخذ کریں گے اور ان کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی بیانات کے ثبوت اخذ کریں گے اور ان کے استعمال سے مختلف مسائل حل کریں گے۔ مثلاً متوازی خطوط، مثلثات، چارجلعہ، دائرے وغیرہ۔

☆ موزوں ضوابط کے استعمال سے مختلف قسم کے مثلثات کا رقبہ معلوم کریں گے اور ان کو عام زندگی میں استعمال کریں گے۔

☆ دی گئی شرائط کے مطابق مختلف جیومٹریائی اشکال بنائیں گے۔ جیسے خطی قطعہ کا عمودی ناصف، زاویئے اور زاویئے کا عمودی ناصف، مثلثات وغیرہ اور ان بناوٹوں کے طریقوں کے لیے استدلالی ثبوت پیش کریں گے۔

☆ کارتیزی مستوی میں کسی نقطہ کے تعین کی حکمت عملی پروان چڑھے گی۔

☆ عام زندگی میں اوسط، وسطانیہ، بہتاتیہ کن کن مواقعوں پر استعمال ہوتا ہے شناخت کریں گے اور درجہ بندی کریں گے۔

☆ معطیات کو مختلف قسم کے (گروہی/غیر گروہی) جدولوں کیش کل میں بارگراف، ہسٹوگرام (مساوی اور مختلف چوڑائی اور لمبائی) تعددی کثیر ضلعی، تعددی منحنی اور Ogive منحنی وغیرہ میں ظاہر کرکے تجزیہ کریں گے۔

☆ تجربات کے ذریعہ عملی قیاس معلوم کریں گے اور اس کے استعمالات کو اپنے الفاظ میں بیان کریں گے۔

☆ مختلف ٹھوس اشکال جیسے مکعب، مکعب نما، قائم اسطوانہ، قائم مخروط، کرہ اور نصف کرہ کا سطحی رقبہ اور حجم معلوم کرنے کا ضابطہ اخذ کریں گے۔ اور ان کا استعمال ماحول میں موجود اشیا کے لیے کریں گے۔

☆ مندرجہ بالا اکتساب کی مدد سے طلبا ایسے مسائل کو حل کرنے کے قابل ہوں گے جس سے وہ واقف نہیں ہیں۔ جن میں ایسے مسائل بھی شامل ہوں گے جو طلبا نہیں سیکھے ہیں۔

Textbook - Overview

The Government of Telangana has decided to revise the curriculum of all the subjects based on State Curriculum Frame work (SCF - 2011) which recommends that children's life at schools must be linked to their life outside the school. Right to Education (RTE - 2009) perceives that every child who enters the school should acquire the necessary skills prescribed at each level upto the age of 14 years. The introduction of syllabus based on National Curriculum Frame Work - 2005 is every much necessary especially in Mathematics and Sciences at secondary level with a national perspective to prepare our students with a strong base of Mathematics and Science.

The strength of a nation lies in its commitment and capacity to prepare its people to meet the needs, aspirations and requirements of a progressive technological society.

The syllabus in Mathematics for three stages i.e. primary, upper primary and secondary is based on structural and spiral approaches. The teachers of secondary school Mathematics have to study the syllabus of classes 8 to 10 with this background to widen and deepen the understanding and application of concepts learnt by pupils in primary and upper primary stages.

The syllabus is based on the structural approach, laying emphasis on the discovery and understanding of basic mathematical concepts and generalisations. The approach is to encourage the pupils to participate, discuss and take an active part in the classroom processes.

The present text book has been written on the basis of curriculum and Academic standards emerged after a thorough review of the curriculum prepared by the SCERT.

- The syllabus has been divided broadly into six areas namely, Number System, Algebra, Geometry, Measuration, Statistics and Coordinate Geometry. Teaching of the topics related to these areas will develop the skills prescribed in academic standards such as problem solving, logical thinking, mathematical communication, representing data in various forms, using mathematics as one of the disciplines of study and also in daily life situations.

  The text book attempts to enhance this endeavor by giving higher priority and space to opportunities for contemplations. There is a scope for discussion in small groups and activities required for hands on experience in the form of 'Do this' and 'Try this'. Teacher's support is needed in setting the situations in the classroom.

Some special features of this text book are as follows

- The chapters are arranged in a different way so that the children can pay interest to all curricular areas in each term in the course of study.
- Teaching of geometry in upper primary classes was purely an intuition and to discover properties through measurements and paper foldings. Now, we have stepped into an axiomatic approach. Several attempts are made through illustrations to understand, defined, undefined terms and axioms and to find new relations called theorems as a logical consequence of the accepted axioms. Care has been taken to see that every theorem is provided initially with an activity for easy understanding of the proof of those theorems.
- Continuous Comprehension Evaluation Process has been covered under the tags of 'Try this' and 'Think, Discuss and Write'. Exercises are given at the end of each sub item of the chapter so that the teacher can assess the performance of the pupils throughout the chapter.
- Entire syllabus is divided into 15 chapters, so that a child can go through the content well in bit wise to consolidate the logic and enjoy the learning of mathematics.
- Some interesting and historical highlights are given under titles of Brain teasers, Do you know will certainly help the children for creative thinking.
- Colourful pictures, diagrams, readable font size will certainly help the children to adopt the contents and care this book as theirs.

Chapter (1) Real Numbers under the area number system and irrational numbers in detail.The child can visualise the rational and irrational numbers by the representation of them on number line. Some history of numbers is also added e.g value of to create interest among students. The representation of real numbers on the number line through successive magnification help to visualise the position of a real number with a non-terminating recurring decimal expansion.

درسی کتاب۔ایک جائزہ

حکومت آندھراپردیش نے ریاستی درسیاتی خاکہ 2011ء کے تحت تمام مضامین کے نصاب پر نظر ثانی کا فیصلہ کیا ہے۔اس نظر ثانی کا بنیادی مقصد یہ ہے کہ مدرسہ میں بچوں کی مشغولیات بیرون مدرسہ مشغولیات سے مربوط ہوجائیں۔حق تعلیم 2009ء کے قانون کا مدعا بھی یہی ہے کہ ہر وہ بچہ جسے مدرسہ میں شریک کیا جاتا ہے مدرسہ کے ہر اک درجہ میں 14 سال کی عمر تک مطلوبہ مہارت حاصل کرتا جائے۔قومی درسیاتی خاکہ 2005ء کی اساس پر جو نصاب متعارف کروایا گیا ہے وہ ریاضی اور سائنس کی تعلیم کے لیئے قومی سطح پر مستحکم بنیاد فراہم کرنے ثانوی سطح بھی پر ضروری ہے۔

کسی قوم کا استحکام ایک ترقی پذیر ٹکنالوجیکل سوسائٹی کی ضرورتوں کی تکمیل اور اس قوم کی امنگوں کے احترام کے پیش نظر اسے ان خطوط پر تیار کرنے عزم و عمل پر منحصر ہوتا ہے۔ابتدائی،وسطانوی اور ثانوی تعلیم کے تین مرحلوں کے لیئے ریاضی کا نصاب مضمون کے موضوعات کے ڈھانچہ اور ہم آہنگ طریقہ تدریس پر وضع کیا گیا ہے۔اساتذہ کے لیئے ضروری ہے کہ وہ ابتدائی اور وسطانوی سطحوں پر طلباء کے سیکھے ہوئے نظریات کے فہم اور اطلاقات کی گہرائی کا جائزہ لینے آٹھویں تا دسویں جماعتوں کے نصاب کا مطالعہ کریں۔

نصاب،موضوعات کے ڈھانچہ کی اساس پر مدون کیا گیا ہے،جس میں ریاضی کے بنیادی تصورات اور عمومی ہم رنگی کے فہم اور تحقیقاتی عوامل پر زور دیا گیا ہے۔

موجودہ کتاب،ایس سی ای آر ٹی کی جانب سے تیار کردہ نصاب پر مکمل نظر ثانی کے بعد وقوع پذیر نصابی اور تعلیمی معیارات کو ملحوظ رکھتے ہوئے تیار کی گئی ہے۔

اس کا نصاب کو چھ زمروں (1) اعداد کے نظام (2) الجبراء (3) بنیادی حسابات (4) علم ہندسہ (5) مساحت اور (6) شماریات میں تقسیم کیا گیا۔

ان موضوعات کی تدریس سے تعلیمی معیارات میں مطلوبہ مہارت حاصل ہوگی جیسے حسابی مسائل کے حل،منطقی سوچ،مواصلاتی صلاحیت،اعداد و شمار کے مختلف انداز، مطالعہ کے اک خاص شعبہ کے طور پر ریاضی کے استعمال کی صلاحیت کے علاوہ روزمرہ زندگی میں بھی استعمالات شامل ہیں۔

اس کتاب کی بعض امتیازی خصوصیات

☆ باب کچھ اس انداز سے ترتیب دیئے گئے ہیں کہ طلباء اپنے نصاب کے ہر حصہ پر توجہ دے سکیں۔

☆ وسطانوی سطح پر علم ہندسہ کی تدریس خالصتاً بچہ کی تجسی جبلت کو پیش نظر رکھتے ہوئے متعین کی گئی ہے۔جیومٹری کی خصوصیات پیمائشوں اور پیپر فولڈنگ کے ذریعہ خصوصیات کو از خود پہچاننے کے طریقے اپنائے گئے ہیں۔تفہیم،تشریح اور غیر تعریف شدہ اصطلاحوں کو واضح کرنے خاکے فراہم کئے گئے ہیں۔منظورہ مسلمہ اصولوں کے دلائلی نتائج (حسابی مسئلے) اخذ کرنے کی کوشش کی ہے۔

☆ حسابی مسئلوں کے ثبوت کی آسان تفہیم کے لیئے مشغولیاتی تجربہ کو پیش نظر رکھنے کی ہر ممکنہ کوشش کی گئی ہے۔

کوشش کیجئے غور کیجئے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھنے کے موضوعات کے تحت مسلسل جامع جانچ کے عمل کا احاطہ کیا گیا ہے۔باب میں تحت کے ہر موضوع کے اختتام پر مشقی سوالات دیئے گئے ہیں تاکہ استاد کو سہولت حاصل ہو سکے کہ وہ پورے باب کا احاطہ کرتے ہوئے طلباء کے تعلیمی مظاہرے کی جانچ کر سکے۔

☆ سارے نصاب کو 15 بابوں میں تقسیم کیا گیا ہے تاکہ اپنے استدلالی نتائج کو مستحکم کرتے ہوئے طالب علم کو حساب سے لطف اندوز ہونے کا موقع فراہم ہو سکے۔یوں ایک بچہ متن کے پہلو کا بھی احاطہ کر سکتا ہے۔

☆ رنگین تصاویر اشکال اور بہ آسانی پڑھے جانے والے مواد سے طالب علم کو نہ صرف اسباق سمجھنے میں مدد ملتی ہے بلکہ کتاب کو وہ اپنی اک خاص ملکیت متصور کرے گا۔

باب (1) اعداد کے نظام کے تحت ''ناطق اعداد'' کا باب ہے جو اس امر پر بحث کرتا ہے کہ ایک ناطق عدد،اک کسر سے کسطرح مختلف ہے۔ان اعداد کی خصوصیات کو ضروری خاکوں اور اشکال سے سمجھایا گیا ہے۔بچوں کو موقع دیا گیا ہے کہ وہ عددی خط پر ناطق عدد کو دیکھیں۔اسی طرح عددی خط پر اعشاری اعداد بھی ملاحظہ کئے جا سکتے ہیں۔مربعوں اور جذر المربعوں کے باب (باب 6) میں ہم نے کوشش کی ہے کہ بچہ کامل مربع،مربع عدد کی خصوصیات کی تفہیم کے علاوہ اجزائے ضربی اور طویل تفہیمی

Chapter (2) Polynomials and Factorisation under the area algebra dealt with polynomials in one variable and discussed about how a polynomial is diffierent from an algebraic expression. Facrtorisation of polynomials using remainder theorem and factors theorem is widely discussed with more number of illustrations . Factorisation of polynomials were discussed by splitting the middle term with a reason behind it. We have also discussed the factorisation of some special polynomials using the identities will help the children to counter various tuypes of factorisation.

Chapter (3) Linear equations in two variables under the same area will enable the pupil to discover through illustative examples,the unifying face of mathematical structure which is the ultimate objective of teaching mathematics as a system. This chapter links the ability of finding unknown with every day experience.

There are 7 chapters of Geometry i.e (**3, 4, 7, 8, 11, 12 and 13**) were kept in this book. All these chapters emphasis learning geometry using reasoning , intutive understanding and insightful personal experience of meanings. It helps in communicating and solving problems and obtaining new relations among various plane figures. Development geometry historically through centuries is given and discussed about Euclid's contribution in development of plane geometry through his collection "The Elements" . The activities and theorem were given on angles, triangles, quadrilaterals , circles and areas. It will develop induction, deduction, analytical thinking and logical reasoning. Geometrical constructions were presented insuch a way that the usage of an ungraduated ruler and a compass are necessary for a perfect construction of geometrical figures.

Chapter (5) deals with coordiante geometry as an alternate approach to Euclidean geometry by means of a coordinate system and associated algebra. Emphasis was given to plot ordered pairs on a cartesian plane (Graph) with a wide variety of illustratgive examples.

Chapter (9) statistics deals with importance of statistics , collection of statistical data i.e grouped and ungrouped , illustrative examples for finding mean, median and mode of a given data was discussed by taking daily life sitution.

Chapter (14) Probability is entirely a new chaper for secondary school students was introduced with wide variety of examples which deals with for finding probable chances of success in different fields. and mixed proportion problems with a variety of daily life situations.

Chapter (10) surface areas and volumes we discussed about finding curved (lateral) surface area, total surface area and volume of cylinder, cone and sphere. It is also discussed the relation among these solids in finding volumes and derive their formulae.

Chapter (15) Proofs in mathematics will help ;the students to understand what is a mathematical statement and how to prove a mathematical statement in various situations. We have also discussed about axiom , postulate, conjecture and the various stages in proving a theorem with illustrative examples. Among these 15 chapters the teacher has to Real Numbers, Polynomials and Factorisation, Co-ordinate geometry, Linear equation in two variables, Triangles, Quadrilaters and Areas under paper - I and the elements of Geometry, lines and angles, Statistics, Surface as a part of are volume, Circles Geometrical constructions and probability under paper - II.

The success of any course depends not so much on the syllabus as on the teacher and the teaching methods she employs. It is expected that all concerned with the improving of mathematics education would extend their full co operation in this endeavour.

Mere the production of good text books does not ensure the quality of education, unless the teachers transact the curriculum the way it is discussed in the text book. The involvement and participation of learner in doing the activities and problems with an understanding is ensured. Therefore it is expected that the teachers will bring a paradigm shift in the classroom process from mere solving the problems in the exercises routinely to the conceptual understanding, solving of problems with ingenity.

Text Book development committee

طریقہ سے جذرالمربع محسوب کرسکے۔مکعب اور جذرالمکعب کی تفہیم بھی خاکوں اور اشکال کی مدد سے کروانے کی کوشش کی گئی ہے۔

باب((2)،(4)،(11)اور((12الجبراء سے متعلق ہیں۔خطی مساوات (ایک ہی متغیر) کے باب میں طالب علم کو موقع فراہم کیا گیا ہے کہ وہ عبارتی سوال پڑھ کر متغیر کو پہنچانے اور تبدل کے عمل سے اس کی قدر معلوم کرے۔قوت نما کے باب کے تحت بڑے اعداد کو قوت نما کے انداز میں لکھنے کی غرض سے بعض حسابی طریقے بتائے گئے ہیں،قوت نما کے اصولوں پر مدلل بحث کے لیئے مثالیں دی گئی ہیں۔الجبری عبارتیں اور اجزائے ضربی کے بابوں میں اپنی بحث ہم نے زیادہ تر ایک رکنی اور دو رکنی عبارتوں تک محدود رکھی گئی ہے الجبراء کی متماثلات جیسے

$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2,\ (a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ اور

$(x\pm a)(x\pm b)=x^2\pm(a+b)x+ab$ کے لئے قدریں لے کر جیومٹری کے ذریعہ تصدیق کی گئی ہے۔طالب علم کو مشق کے پیش نظر الجبراء کی ایسی ہی عبارتوں کے اجزائے ضربی کے متعدد سوالات دیئے گیے ہیں۔باب((15 میں نسبت،تناسب،مرکب نسبت،ڈسکاونٹ فیصد،نفع ونقصان،سل ٹیکس، ویاٹ،سود مفرد،سود مرکب،سالانہ،ششماہی،اور سہ ماہی کے علاوہ سود مرکب کے ضابطہ کے اطلاق جیسی مقداروں کا تقابلی جائزہ پیش کیا گیا ہے۔باب((10 جو راست اور معکوس تناسب کا باب ہے، راست تناسب اور تناسب کی ملی جلی نسبتوں پر روزمرہ زندگی کی مختلف مثالوں پر مشتمل ہے۔

اعداد سے مشغلہ کے تحت باب((15 بچوں کو حسابات کے نت نئے طریقے اور اعداد کے بعض سلسلوں کے ذریعہ قواعد کی تفہیم کا موقع عطا کرتا ہے۔تقسیم کے اصولوں پر بھی نئے طریقوں کی تدوین کے پیش نظر ہی گفتگو کی گئی ہے۔ بچوں کی دلچسپی کو فروغ دینے کے مقصد سے اس موضوع پر قابل لحاظ مثالیں اور پہلیاں دی گئی ہیں۔

علم ہندسہ پر بحث اس مقصد کے پیش نظر کی گئی ہے کہ طالب علم اپنے اطراف واکناف اشکال کو اپنی بصری صلاحیت اور خاکے اتارنے کی مہارت کے ذریعہ مضمون کو منزلت کی نگاہ سے دیکھے۔چار ضلعی اشکال کو اتارنے کے باب(3) میں اس امر پر زور دیا گیا ہے کہ بچہ چار ضلعی کی خصوصیات کا اعادہ کرتے ہوئے اک منفرد چار ضلعی کی بناوٹ کرے۔بناوٹ کے تمام نمونوں کے ساتھ واضح مثالیں دی گئی ہیں۔

باب(8)علم ہندسہ کی اشکال کو فروغ دینے اور باب(13) دو سمتی مقداروں اور تصورات کے ذریعہ تین سمتی اجسام کا تصور پیش کرنے کے لیئے شامل کیا گیا ہے۔3D اشکال کے ذریعہ بچہ کو مختلف مستوی اشکال کی تفہیم کے کافی مواقع ملیں گے۔

اعداد و شمار سے متعلق حسابات کا زمرہ ایک ایسا زمرہ ہے جس میں بچہ کو جدولوں خاکوں اور ترسیمات کے ذریعہ سے اس کے اطراف واکناف کے ماحول سے متعلق علم حاصل کرنے کا موقع فراہم ہوتا ہے۔باب(7) میں تعددی جدولوں اور ترسیمات کے متعلق ہی امور شامل ہیں۔اس باب میں جدولوں کے ذریعہ اعداد کی درجہ بندی اور ان اعداد کو تعددی ترسیمات جیسے ہسٹوگرام Histogram،کثیر رکنی اور منحنی خطوط پر پیش کرنے پر بحث کی گئی ہے۔اس سلسلہ میں غیر تعددی اوسط حسابیہ ،وسطانیہ اور بہتاتیہ کا اعادہ کرتے ہوئے بعض مثالیں دی گئی ہیں۔مرکزی رجحان اور پیچیدہ مسائل پر ان کی قدریں معلوم کرنے کے متبادل طریقے بھی شامل کئے گئے ہیں۔

آخری باب (9) میں مستوی اشکال کی سطح کے رقبے منحرف چار ضلعی،دائرہ،مدوری راستے اور قطاع کے رقبوں کے علاوہ باب(14) میں پہلوی سطح کے رقبے، مکعبوں کے حجم اور مکعب نما کے حجم بھی شامل کئے گئے ہیں۔

تاوقتکہ اساتذہ اکرام اس کتاب کے منشاء کے مطابق نصاب کو عملی جامہ نہیں پہناتے محض بہتر نصابی کتابوں ہی کی تیاری سے معیاری تعلیم کو یقینی نہیں بنایا جاسکتا۔اس کتاب میں مختلف عملی کام کرتے ہوئے حسابی سوالات حل کرنے کیلئے طالب علم کی مشغولیت کو یقینی بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔

لہٰذا اساتذہ سے یہ توقع کی جاتی ہے کہ وہ محض مشقی سوالات حل کروانے کے کمرہ جماعت کے روایتی طرز کے بجائے بچوں میں نفس مضمون کا فہم پیدا کرنے اور ان بچوں میں سوالات کو از خود حل کرنے کی جستجو پیدا کرنے ذہن سازی کی مخلص سعی کرینگے۔

"The Wonder of Discovery is especially keen in childhood"

How a child become Ramanujan a great mathematician of all the time?

Ramanujan

Srinivasa Ramanujan was the one who never lost his joy at learning something new. As a boy he impressed his classmates, senior students and teachers with his insight and intuition. One day in an Arithmetic class on division the teacher said that if three bananas were given to three boys, each boy would get a banana and he generalised this idea. Then Ramanujan asked "Sir, if no banana is distributed to no student will every one still get a banana?" Ramanujan's math ability won several friends to him. Once his senior student posed a problem "If $\sqrt{x}+y=7$ and $x+\sqrt{y}=11$, what are x and y". Immediately Ramanujan replied $x=9$ and $y=4$. His senior was impressed and became a good friend to him. In his school days, along with school homeworks, Ramanujan worked with some patterns out of his interest.

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}$$
$$=\sqrt{1+(2\times 4)}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{16}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+15}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}$$

and so on ...

$$\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2$$

... and so on

Srinivasa Aaiyangar Ramanujan is undoubtedly the most celebrated Indian Mathematical genius. He was born in a poor family at Erode in Tamilnadu on December 22, 1887. Largely self taught, he feasted on **"Loney's Trigonometry"** at the age of 13, and at the age of 15, his senior friends gave him synopsis of Elementary results in pure and Applied mathematics by George Carr. He used to write his ideas and results on loose sheets. His filled note books are now famous as **"Ramanujan's Frayed note books"**. Though he had no qualifying degree, the university of Madras granted him a monthly Scholarship of Rs. 75 in 1913. He had sent papers of 120 theorems and formulae to great mathematican G.H. Hardy (Combridge University, London). They have recognised these as a worth piece and invited him to England. He had worked with Hardy and others and presented numerical theories on numbers, which include circle method in number theory, algebra inequalities, elliptical functions etc. He was second Indian to be elected fellow of the Royal Society in 1918. He became first Indian elected fellow of Trinity college, Cambridge. During his illness also he never forget to think about numbers. He remarked the taxi number of Hardy, 1729 is a singularly unexceptional number. It is the smallest positive integer that can be represented in two ways by the sum of two cubes; $\mathbf{1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3}$. Unfortunately, due to tuberculosis he died in Madras on April 26, 1920. Government of India recognised him and released a postal stamp and declared 2012 as **"Year of Mathematics"** on the eve of his 125th birth anniversary.

تاریخ کے جھروکے سے

(انکشاف میں عجائبات کا ظہور بالخصوص بچپن سے ہی ہوتا ہے)

راما نجن نامی لڑکا کس طرح ماہر ریاضی داں بن سکا؟

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}$$
$$=\sqrt{1+(2\times4)}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{16}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+15}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times5)}}$$

سرینواس راما نجن نئے معلومات کے سیکھنے میں ہمیشہ پہل کرتے، کبھی اپنی دلچسپی کو منتشر نہیں ہونے دیا۔ بچپن ہی سے اپنی لیاقت، صلاحیت، سوچ، غور و فکر سے نہ صرف ساتھیوں کو بلکہ بڑوں اور اساتذہ کو حیرت زدہ کر دیا تھا۔ ایک وقت کی بات ہے کہ کمرے جماعت میں معلم حساب (Arithmetic) کا باب پڑھاتے وقت "تین موز کو تینوں میں تقسیم کرنے پر ہر ایک کو ایک موز ملے گا"۔ یہ کہہ کر تقسیم کے اصول بتانے لگے۔ اتنے میں راما نجن نے کہا "سر کبھی بھی موز کو کسی بھی بچے کو نہ بانٹیں تو کیا ہوگا؟ سوال کیا۔ یعنی اس بات کی طرف نشاندہی مبذول کروائی کہ صفر کو صفر سے تقسیم کرنے پر کیا حاصل ہوگا۔ اس طرح تقسیمی اصول کی خامی کو منظر عام پر لایا۔ راما نجن اپنی ریاضی کے غیر معمولی صلاحیت کی بناء پر انکے پرستار بن گئے۔ اور کئی افراد کو اپنا دوست بنالیا۔ ایک دفعہ Senior لڑکے نے راما نجن سے سوال کیا کہ اگر $\sqrt{x}+y=7$ اور $x+\sqrt{y}=11$ ہو تو x اور y کی قدر کیا ہوگی؟ فوری راما نجن نے $x=9$ اور $y=4$ جواب دے کر تعجب میں ڈال دیا۔ اس کے بعد وہ لڑکا راما نجن کا ایک اچھا دوست بن گیا۔

$$\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times3\times5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times3\times5\times7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2$$

اسکول میں پڑھتے وقت، اسکول میں دیے جانے والے ہوم ورک کے علاوہ پسندیدہ مضمون ریاضی میں نئی ترتیب، نئے Patterns اور نئے انکشافات کو جنم دیا۔

سرینواس ایانگار راما نجن ایک غیر معمولی اور مشہور و معروف ہندوستانی ریاضی داں ہیں۔ یہ 22 / ڈسمبر 1887 میں تامل ناڈو کے ایک مقام Erode میں غریب گھرانے میں پیدا ہوئے۔ بچپن ہی سے غیر معمولی ذہن و فطین راما نجن نے اپنی 13 سالہ عمر میں ہی "Loneys Trignometry" کی بنیاد ڈالی۔ 15 سال کی عمر میں اپنے ساتھی جارج کار (George Car) کی لکھی ہوئی تصنیف "Elementry Results in Pure and Applied Mathematics" میں موجود کئی ضوابط کا تجزیہ کر کے مختصراً انداز میں تشریحات لکھیں۔ وہ اپنے خیالات اور نتائج کو ناکارہ کاغذات پر قلم بند کیا کرتا تھا۔ اس طرح کے ناکارہ کاغذات ہی مستقبل میں راما نجن کی لیاقت و صلاحیت کے اظہار کا ذریعہ بننے والے "Ramanujan's Frayed note books" کے نام سے مشہور ہوئے اس کے پاس کوئی باقاعدہ سند نہ ہونے کے باوجود اس کی لیاقت کی شناخت کرتے ہوئے 1913ء میں مدراس یونیورسٹی نے ماہانہ 75 روپے اعزازیہ مقرر کیا۔ بعد ازیں راما نجن نے پر جوش انداز میں تقریباً 120 ضوابط کئی مسئلوں کو وقت کے مشہور ریاضی داں G.H.hardy (Combridge University, London) کے پاس بھجوایا۔ ہارڈی نے ان کا بغور مطالعہ کر کے اسکی اہمیت کو محسوس کرتے ہوئے راما نجن کو اپنے پاس لندن بلوالیا۔ لندن میں ہارڈی کے ساتھ مل کر راما نجن نے کئی مسئلوں بالخصوص عددی نظام، الجبری جملوں، ناقصی تفاعلات (Elliptical Function) پر اپنی تحریریں لکھیں۔ 1918ء میں وہ Fellow of Trinity college اور کیمبریج یونیورسٹی کے لیے منتخب ہونے والے پہلے ہندوستانی ہونے کا اعزاز حاصل ہوا۔ اپنے بیماری کے دور میں بھی اعداد اور ریاضیاتی سوچ سے منسلک رہے۔ ایک دن Hardy نے راما نجن کی عیادت کی اس نے کہا کہ میں 1729 نمبر والی گاڑی میں آیا ہوں۔ راما نجن نے اس عدد کو غیر معمولی قرار دیتے ہوئے کہا کہ 1729 جڑواں مفرد اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ ہے۔ ($1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$) ہے۔ بدقسمتی سے 26 / اپریل 1920 کو مدراس میں دق کا شکار ہو کر آخری سانس لی۔ حکومت ہند نے ریاضی کے میدان میں راما نجن کی گراں قدر خدمات کے اعزاز میں نہ صرف پوسٹل ٹکٹ جاری کیے بلکہ 125 ویں یوم پیدائش کے موقع پر 2012 کو "Year of Mathematics" (ریاضیاتی سال) قرار دیا۔

SIGNS AND SYMBOLS OF SCHOOL MATHEMATICS

Sign/symbol	Read as	Mathematical meaning
$\pm$	plus or minus	Add or Substract
$\neq$	not equal to	unequal
$\therefore$	therefore	logical flow of a statement
∞	infinite	not finite
$\sim$	is similar to	same in geometrical shape
$\cong$	is congruent to	same shape and same size
$\equiv$	is identically equal to	equivalent statements
$\forall$	for all	universal quantifier
$\sqrt{\ }$	square root of	square root of a number
$\sqrt[3]{\ }$	cube root of	cube root of a number
$\cup$	cup of	union of sets
$\cap$	cap of	intersection of sets
ϕ	phi	symbol for golden ratio
%	percent of	per hundred
o	degree	angle measure
Δ	delta / triangle	symmetric difference in sets/symbol of triangle
$\in$	belongs to	an element belong to a particular set
$\leftrightarrow$	equivilent to	one to one correspondence
α, β, γ	alfa,beta,gamma	greek lettetrs to represent zeroes of polynomial
μ	mu	universal set symbol
π	pi	circumference of a circle / diameter
σ	sigma	sum of scores
$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$	sin theta,cos theta,tan theta	trigonometric ratios
$\overline{x}$	x bar	arithmetic mean
$\log_a x$	log x to the base a	logarthemic function
(a, b)	point (a, b)	ordered pair (a, b)
$\|x\|$	mod x	absolute value of a real number
P(x)	P of x	a polynomial function in x
P(E)	P of E	probability of an event
$\because$	Since	reasoning at a stage
₹	rupee	symbol of Indian rupee
$\|\|$	is parallel to	parallel lines
$\perp$	is perpendicular to	making 90 degree with a line
{ }	flower bracket	used to set notation
$\overset{\frown}{PQ}$	arc PQ	arc of a circle
a^2	a square	square of a number
$\angle$	angle	symbol of angle
θ	theta	measurement of an angle

یادداشت

Notes

کمیٹی برائے فروغ درسی کتاب - 2013

مشیر اعلیٰ

سری وی۔ کنن، ڈیپارٹمنٹ آف میاتھامیٹکس اینڈ اسٹاٹسٹکس یونیورسٹی آف حیدرآباد

سری چُکا رمیّا، مشہور اسکالر ریاضی، تلنگانہ حیدرآباد

ڈاکٹر ایچ۔ کے۔ دیوان، ایجوکیشن اڈویزر، ویدیا بھوان سوسائٹی، اُدیپور، راجستھان

ایڈیٹرس (انگریزی)

ڈاکٹر ایس سریش بابو، پروفیسر، ایس سی ای آر ٹی، حیدرآباد۔

سری این سی ایچ پٹابھی راماچاریولو، موظف NIT ضلع ورنگل۔

سری کے برہمیا، موظف پروفیسر، ایس سی ای آر ٹی، حیدرآباد

پروفیسر وی شیوا رام پرساد، موظف، شعبہ ریاضی، عثمانیہ یونیورسٹی، حیدرآباد

سری اے پدمانابھم، موظف صدر شعبہ ریاضیات، مہارانی کالج پداپورم۔

ڈاکٹر جی ایس این مورتی، ریٹائرڈ ریڈر، آر آر ایس آر کے آر کالج، بابلی

مصنّفین

سری کا کولاورم راجیندر ریڈی، اسکول اسسٹنٹ، میونسپل ہائی اسکول، کاسپا، وجیانگرم

سری کے کے وی رایولو، لکچرر IASE، زیڈ پی ایچ ایس، مولوموڈی، ضلع نیلور

سری ٹاٹاوینکٹا راما کمار، ہیڈ ماسٹر زیڈ پی پی ایچ ایس ملمڈی، ضلع نیلور

سری جی وی بی ایس این راجو، SA، ایم پی ایل ہائی اسکول، کسپا ضلع وجیانگرم

سری سوما پرساد بابو، PGT، APTWRS، چندراشیکھراپورم، ضلع نیلور

سری کے وی سریندر ریڈی، SA، زیڈ پی ایچ ایس عالم پور، ضلع محبوب نگر

سری کومندوری مرلی سرینواس، PGT، APTWRS, سری سیلم

سری ابّا راجو کشور، SGT، ایم پی یو پی ایس، چلامنڈی، ضلع گنٹور

سری پڈالا سریش کمار، ایس اے جی ایچ ایس وجئے نگر کالونی، حیدرآباد

سری جی اننت ریڈی، مؤظف ہیڈ ماسٹر، ضلع رنگاریڈی

سری پی ڈی ایل گنپتی شرما، ایس اے جی ایچ ایس زمستان پوری، منیکیشو رنگر، حیدرآباد

سری ایم راماانجینیلو، لکچرر، گورنمنٹ ڈائیٹ وقارآباد، ضلع رنگاریڈی

سری دُگاراجو وینو، ایس اے، یو پی ایس، آلہ واڑہ، چیوڑلہ، ضلع رنگاریڈی

سری ایم راماچاری، لکچرر، گورنمنٹ ڈائیٹ وقارآباد، ضلع رنگاریڈی

پی انتھونی ریڈی، ہیڈ ماسٹر سینٹ پیٹر ہائی اسکول، آر این پیٹھ، ضلع نیلور

ڈاکٹر اے رام بابو، لکچرر، گورنمنٹ سی ٹی ای، ضلع ورنگل

ڈی منوہر، ایس اے، زیڈ پی ایچ ایس، برہمن پلی، ٹڈوائی، ضلع نظام آباد

ڈاکٹر پی رمیش، لکچرر، گورنمنٹ آئی اے ایس سی نیلور

کمیٹی برائے فروغ درسی کتاب - 2013

ایڈیٹرس (اُردو)

ڈاکٹراحمدوحیداللہ، موظف پروفیسر، مفخم جاہ کالج آف انجینیئرنگ اینڈ ٹکنالوجی، حیدرآباد

جناب سیدعبدالواجد ہاشمی، صدر مدرس، گورنمنٹ ہائی اسکول، سیتارام پیٹھ، حیدرآباد

جناب محمد باسط علی، مؤظف جونیئر لکچرر، حیدرآباد

مترجمین

جناب ابوطاہر محمدعبدالشکور، ایس اے، جی بی ایچ ایس، اولڈ ملک پیٹ، حیدرآباد

محترمہ انیسہ تسنیم، ایس اے، جی جی ایچ ایس، سیکنڈ لانسر، گولکنڈہ، حیدرآباد

جناب محمدعبدالعلیم، ایس اے، جی ایچ ایس، معظم شاہی، حیدرآباد

جناب عنایت الرحمٰن، ایس اے، جی بی ایچ ایس، گوشہ محل، حیدرآباد

جناب خواجہ تقی الدین، ایس اے، جی ایچ ایس، معظم شاہی، حیدرآباد

جناب احمد علی طیب، ایس اے، جی ایچ ایس، معظم شاہی، حیدرآباد

جناب محمد احمد علی، ایس اے، جی ایچ ایس، مستعد پورہ اُردو، حیدرآباد

جناب محمد ایوب احمد، ایس اے، ضلع پریشد ہائی اسکول (اُردو) آتما کور، ضلع محبوب نگر

جناب سید عمران، ایس اے، گورنمنٹ ہائی اسکول ڈی ٹی گٹہ، ضلع محبوب نگر

کوآرڈنیٹر

جناب محمد افتخارالدین، کوآرڈنیٹر (اردو)، ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، تلنگانہ، حیدرآباد۔

ڈی ٹی پی اینڈ لے آوٹ ڈیزائننگ

جناب محمد ایوب احمد، ایس اے، ضلع پریشد ہائی اسکول، آتما کور، ضلع محبوب نگر۔

جناب ٹی۔ محمد مصطفےٰ، حبیب کمپیوٹرس، مشیرآباد، حیدرآباد۔

جناب محمد ذکی الدین لیاقت، ممتاز کمپیوٹرس، رحیم مزل، شاہ گنج، حیدرآباد۔

جناب شیخ حاجی حسین، امپرنٹ کمپیوٹیک بالانگر، میڈ چل، حیدرآباد۔

کمیٹی برائے فروغ و اشاعت درسی کتب

ڈائریکٹر، ایس۔سی۔ای۔آر۔ٹی، تلنگانہ، حیدرآباد

ڈائریکٹر، گورنمنٹ ٹکسٹ بک پرنٹنگ پریس، تلنگانہ، حیدرآباد

پروفیسر شعبہ نصاب و درسی کتب، ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، حیدرآباد